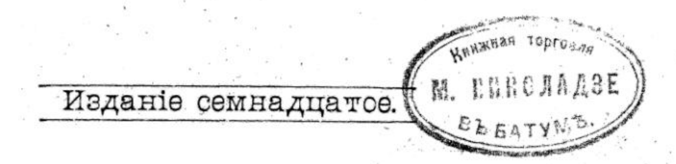
А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ

АЛГЕБРА.

Въ предыдущихъ изданіяхъ Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена въ качествѣ **руководства** для гимназій, мужскихъ и женскихъ, и реальныхъ училищъ („Журн. М. Н. Пр.“, 1905, май). **Рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія („Церк. Вѣд.“, 1893, № 32).

Въ программахъ кадетскихъ корпусовъ (утвержденныхъ въ маѣ 1898 г.) указана, какъ **руководство**.



Изданіе семнадцатое.

Цѣна 1 руб. 10 коп.


Изданіе книжнаго магазина
В. В. ДУМНОВА
подъ фирмою
„Наслѣдн. бр. Салаевыхъ“.

МОСКВА.
Т—во «Печатня С. П. Яковлева». Москва, Петровка, Салтыковскій п., д. Т—ва, № 9.
1906.

Предисловіе къ восьмому изданію.

Въ недавнее время намъ пришлось составить „Краткую алгебру для женскихъ гимназій и духовныхъ семинарій“; при этомъ естественно было стремиться къ возможному упрощенію изложенія различныхъ частей курса. Приступая затѣмъ къ подготовленію восьмого изданія „Элементарной алгебры“, мы сравнивали изложеніе этого учебника съ изложеніемъ „Краткой алгебры“ съ цѣлью опредѣлить, нельзя ли безъ вреда для научности и систематичности курса упростить изложеніе первой по примѣру второй. Это оказалось иногда возможнымъ. Такимъ образомъ, въ восьмомъ изданіи „Элементарной алгебры“ въ нѣкоторыхъ мѣстахъ устранена излишняя краткость изложенія, мѣстами отвлеченность замѣнена конкретностью, кое-гдѣ добавлены нѣкоторые практическіе примѣры и т. п. Эти измѣненія, правда, невелики, но все-таки, какъ намъ кажется, они улучшаютъ учебникъ, дѣлая его болѣе доступнымъ для усвоенія.

По примѣру той же „Краткой алгебры“ мы добавили въ восьмомъ изданіи „Элементарной“ третье значеніе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, какъ орудія для выраженія величинъ *противоположныхъ* (стр. 20-я). Такое дополненіе главнымъ образомъ полезно въ томъ отношеніи, что сразу даетъ ученику нѣчто *конкретное* въ представленіи отрицательнаго числа, тогда какъ безъ того эта конкретность отлагается вплоть до изслѣдованія уравненій.

Помимо этого общаго характера измѣненій укажемъ еще слѣдующія.

Для формулы размѣщеній мы даемъ другой выводъ (стр. 300), который, какъ показалъ намъ опытъ и указанія многихъ преподавателей, усвоивается учениками лучше, чѣмъ изложенный въ прежнихъ изданіяхъ.

Мы указали также (въ выноскѣ, стр. 306) другой способъ вывода произведенія биномовъ, отличающихся вторыми членами; этотъ способъ приводитъ къ результату съ большей легкостью и быстротой и, быть-можетъ, преподаватели предпочтутъ его общепринятому способу, изложенному въ текстѣ.

Считаю долгомъ принести глубокую благодарность всѣмъ гг. рецензентамъ и преподавателямъ, дѣлавшимъ мнѣ замѣчанія о желательныхъ измѣненіяхъ въ курсѣ алгебры.

Девятое и десятое изданія печатаны безъ перемѣнъ съ восьмого. Въ **одиннадцатомъ** изданіи, согласно замѣчаніямъ Уч. Ком. М. Нар. Пр., изложено подробнѣе понятіе о значеніи безконечной непрерывной дроби (§ 320).

Двѣнадцатое изданіе печатано безъ перемѣнъ съ одиннадцатаго.

Въ тринадцатомъ изданіи, помимо многихъ мелкихъ улучшеній, были сдѣланы слѣдующія измѣненія и дополненія:

1) Подробнѣе разъяснено, почему произведеніе оказывается положительнымъ, когда число отрицательныхъ сомножителей четное, и отрицательнымъ, когда число таковыхъ сомножителей нечетное (стр. 27).

2) Въ выноскѣ (стр. 46) приведено иное доказательство теоремы объ остаткѣ, получаемомъ при дѣленіи многочлена $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots$ на $x - a$.

3) Въ выноскахъ (стр. 51 и 57) указано иное доказательство основного свойства дроби и правила умноженія дробей.

4) Улучшено опредѣленіе отношенія (стр. 61).

5) Улучшено доказательство двухъ основныхъ теоремъ объ уравненіяхъ (стр. 71 и 73).

6) Въ § 275 свойство: *„при положительномъ основаніи, не равномъ* 1, *всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ“*, разъяснено при помощи безконечной геометрической прогрессіи, а не принято безъ доказательства, какъ было раньше.

7) Улучшены опредѣленія размѣщеній, перестановокъ и сочетаній (§ 301 и слѣд.).

8) Помѣщенъ новый исправленный рисунокъ къ задачѣ о двухъ источникахъ свѣта (§ 203).

9) Всѣ примѣры набраны обыкновеннымъ, а не мелкимъ шрифтомъ.

10) Терминъ „однозначащія уравненія“ вездѣ замѣненъ другимъ: „равносильныя уравненія“.

Въ **четырнадцатомъ** изданіи, помимо нѣкоторыхъ редакціонныхъ улучшеній, мы сочли полезнымъ помѣстить въ концѣ книги, въ видѣ необязательнаго для прохожденія „Приложенія“, статью „О предѣлѣ погрѣшности, совершаемой при вычисленіяхъ помощью пятизначныхъ логариѳмическихъ таблицъ“.

Въ **пятнадцатомъ** изданіи, помимо нѣкоторыхъ мелкихъ измѣненій, улучшено изложеніе § 320, въ которомъ подробнѣе, чѣмъ прежде, устанавливается „понятіе о безконечной непрерывной дроби“.

Шестнадцатое и семнадцатое изданія печатаны безъ перемѣнъ съ пятнадцатаго.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Отдѣлъ IV. Дополненія.

Приложеніе.

ОТДѢЛЪ I.

Предварительныя понятія.

ГЛАВА I.

Алгебраическое знакоположеніе.

1. Употребленіе буквъ. Если желаютъ указать, какъ рѣшаются задачи, различающіяся только величиною данныхъ чиселъ, то обыкновенно поступаютъ такъ: обозначаютъ данныя числа буквами (латинскаго или французскаго алфавита) и, разсуждая совершенно такъ, какъ если бы данныя были выражены числами, указываютъ посредствомъ знаковъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами и въ какой послѣдовательности, чтобы получить искомое число. При этомъ, обозначивъ одно число какою-нибудь буквою (безразлично какою), надо другія числа обозначить иными буквами, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ.

Пусть, напр., желаемъ указать, какъ рѣшаются задачи, сходныя съ такой: 15 рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ 20 дней. Во сколько дней окончили бы ту же работу 10 человѣкъ? Для этого предлагаемъ задачу въ общемъ видѣ:

a рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ t дней. Во сколько дней окончатъ ту же работу b рабочихъ?

Рѣшимъ эту задачу приведеніемъ къ единицѣ. Если a раб. оканчиваютъ работу въ t дней, то 1 рабочему на вы-

полненіе той же работы понадобится $t \times a$ дней, а b рабочимъ $\frac{t \times a}{b}$ дней. Обозначивъ искомое число дней буквою x, можемъ написать:

$$x = \frac{t \times a}{b}$$

Изъ этого выраженія видно, что для рѣшенія задачи надо число дней умножить на число рабочихъ, данное въ условіи задачи, и раздѣлить на число рабочихъ, данное въ ея вопросѣ.

2. Алгебраическое выраженіе. *Совокупность чиселъ, выраженныхъ буквами и соединенныхъ посредствомъ знаковъ, указывающихъ, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо произвести надъ этими числами, называется алгебраическимъ выраженіемъ.* Таково, напр., выраженіе:

$$\frac{t \times a}{b}$$

Вычислить алгебраическое выраженіе для данныхъ численныхъ значеній буквъ значитъ подставить въ него на мѣсто буквъ эти значенія и произвести указанныя дѣйствія; число, получившееся послѣ этого, наз. *численною величиною* алгебраическаго выраженія (для данныхъ значеній буквъ).

3. Тождественныя выраженія. Два алгебраическія выраженія наз. тождественными, если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ они имѣютъ одну и ту же численную величину. Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t \times a}{b} \text{ и } t \times \frac{a}{b}$$

4. Предметъ алгебры. Алгебра указываетъ способы, посредствомъ которыхъ можно одно алгебраическое выраженіе преобразовать въ другое, тождественное ему. Цѣль такого преобразованія различна:

или 1) упрощеніе алгебраическаго выраженія, т.-е. замѣна одного выраженія другимъ, содержащимъ меньшее число дѣйствій, или болѣе простыя дѣйствія;

или 2) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для обнаруженія какихъ-либо свойствъ его;

или 3) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для запоминанія.

О другихъ сторонахъ алгебры будетъ сказано впослѣдствіи.

5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ, слѣдующія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Опредѣленія первыхъ четырехъ дѣйствій, извѣстныя изъ ариѳметики, слѣдующія:

Сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько данныхъ чиселъ соединяются въ одно число, называемое ихъ суммой.

Вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному слагаемому (вычитаемому) отыскивается другое слагаемое (остатокъ или разность).

Умноженіе на цѣлое число есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число (множимое) повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ (во множителѣ).

Умноженіе на дробь есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такая дробь множимаго, какую множитель составляетъ отъ единицы.

Эти два опредѣленія умноженія обыкновенно соединяютъ въ одно общее опредѣленіе, выражаемое такъ:

Умноженіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ одного даннаго числа (множимаго) составляютъ новое число (произведеніе) такъ, какъ другое данное число (множитель) составлено изъ единицы.

Дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному сомножителю (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Два остальныя дѣйствія опредѣляются такъ:

Возвышеніе въ степень вторую, третью и вообще въ n-ую есть дѣйствіе, посредствомъ котораго данное число повторяется сомножителемъ 2 раза, 3 раза и вообще n разъ. Произведеніе одинаковыхъ сомножителей называется *степенью*, а число этихъ сомножителей—*показателемъ степени*.

Такъ, возвысить 2 въ четвертую степень значитъ найти произведеніе 2.2.2.2 (оно равно 16); 16 есть четвертая степень 2-хъ, 4 — показатель этой степени. Вторая степень называется иначе *квадратомъ*, третья—*кубомъ*. Первою степенью числа называютъ само это число.

Извлеченіе корня второй, третьей и вообще n-ой степени есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такое число, котораго вторая, третья и вообще n-ая степень равняется данному числу. Напр., извлечь изъ 8 корень третьей степени значитъ найти число, котораго 3-я степень равняется 8; такое число есть 2, потому что $2.2.2=8$; корень второй степени изъ 100 есть 10, потому что $10.10=100$. Корень второй степени называется иначе *квадратнымъ*, а корень третьей степени—*кубичнымъ*.

6. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ. Формула. Въ алгебрѣ для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій употребляются тѣ же знаки, какъ и въ ариѳметикѣ; только знакъ умноженія обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или одинъ изъ нихъ выражены буквами; напр., вмѣсто того, чтобы писать $a.b$, обыкновенно пишутъ ab и вмѣсто $3.a$ просто $3a$.

Возвышеніе въ степень обозначается помѣщеніемъ показателя степени надъ возвышаемымъ числомъ, съ правой стороны; напр., 2^4 означаетъ, что 2 возвышается въ 4-ю степень.

При всякомъ числѣ можно подразумѣвать показателя 1; напр., a все равно, что a^1, потому что первая степень числа, по опредѣленію, есть само число.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{\quad}$; подъ его горизонтальной чертой пишутъ то число, изъ котораго надо извлечь корень, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; напр., $\sqrt[3]{8}$ означаетъ корень 3-й степени изъ 8. *Квадратный* корень пишутъ безъ показателя, т.-е. такъ: $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ и т. д.

Какъ знаки соотношеній между численными величинами употребляются: знакъ *равенства* $=$ и знакъ *неравенства* $>$,

обращаемый отверстіемъ угла къ бо́льшему числу. Напр., выраженія:

$$5+2=7;\ 5+2>6;\ 5+2<10$$

читаются такъ: 5+2 равно 7; 5+2 больше 6; 5+2 меньше 10.

Иногда помѣщаютъ два знака другъ подъ другомъ; напр., выраженія:

$$1)\ a \geqslant b;\ 2)\ a \gtrless b;\ 3)\ a \pm b$$

означаютъ: 1) a больше или равно b; 2) a больше или меньше b; 3) a плюсъ или минусъ b.

Употребительны еще знаки $\neq$, $\not>$, $\not<$, получаемые перечеркиваніемъ знаковъ равенства или неравенства. Такое перечеркиваніе означаетъ отрицаніе того значенія, которое придается знаку неперечеркнутому. Такъ, знакъ $\neq$ означаетъ: „*не* равно“, знакъ $\not>$ означаетъ „*не* больше“ и т. п.

Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ равенства или неравенства, образуютъ формулу.

7. Скобки. Если желаютъ выразить, что, совершивъ какое-либо дѣйствіе, надо надъ полученнымъ результатомъ произвести снова какое-либо дѣйствіе, то обозначеніе перваго дѣйствія заключаютъ въ скобки. Напр., выраженіе:

$$20-(10+2)$$

означаетъ, что изъ 20 вычитается не 10, а сумма отъ сложенія 10 съ 2; слѣд., при вычисленіи этого выраженія надо сначала сложить 10 и 2 (получимъ 12) и затѣмъ полученную сумму вычесть изъ 20 (получимъ 8).

Когда приходится заключить въ скобки такое выраженіе, въ которомъ есть свои скобки, то новымъ скобкамъ придаютъ какую-нибудь другую форму для отличія ихъ отъ прежнихъ. Напр., выраженіе:

$$a\ \{b-[c+(d-e)]\}$$

означаетъ, что изъ d вычитается e, полученная разность прикладывается къ c, полученная сумма вычитается изъ b и на эту разность умножается a.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ принято скобки опускать. Напр., скобки не ставятся при обозначеніи послѣдовательныхъ сложеній, вычитаній, умноженій; такъ:

вмѣсто $[(a+b)+c]+d$ пишутъ $a+b+c+d$
„ $[(a-b)+c]-d$ „ $a-b+c-d$
„ $[(ab)c]d$ „ $abcd$

Въ этихъ случаяхъ порядокъ дѣйствій указывается самимъ выраженіемъ (слѣва направо).

ГЛАВА II.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ дѣйствій.

8. 1) *Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

Такъ: $7+3+2=7+2+3=2+7+3=2+3+7=\ldots$
Вообще: $a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=\ldots$

2) *Чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ.*

Такъ: $10+(5+2+3)=10+5+2+3$
Вообще: $a+(b+c+d)=a+b+c+d$

3) *Чтобы отнять сумму, достаточно отнять каждое слагаемое одно за другимъ.*

Такъ: $20-(3+8+2)=20-3-8-2$
Вообще: $a-(b+c+d)=a-b-c-d$

Эти истины настолько очевидны, что доказательство ихъ излишне.

4) *Чтобы прибавить разность, достаточно прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое.*

Такъ: $8+(5-3)=8+5-3$
Вообще: $a+(b-c)=a+b-c$

Дѣйствительно, если второе слагаемое увеличимъ на c, т.-е. вмѣсто $b-c$ возьмемъ b, то получимъ сумму $a+b$;

но отъ увеличенія слагаемаго на c сумма увеличивается также на c; слѣд., искомая сумма должна быть меньше $a+b$ на c, т.-е. она будетъ $a+b-c$.

5) *Чтобы отнять разность, достаточно прибавить вычитаемое и затѣмъ отнять уменьшаемое.*

Такъ: $4-(5-2)=4+2-5$

Вообще: $a-(b-c)=a+c-b$.

Дѣйствительно, если мы увеличимъ уменьшаемое и вычитаемое на c, то разность не измѣнится; но тогда уменьшаемое будетъ $a+c$, а вычитаемое b; слѣд., разность будетъ $a+c-b$.

Укажемъ еще слѣдующія свойства умноженія и дѣленія, извѣстныя изъ ариѳметики:

6) *Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.*

Такъ: $2.\frac{5}{7}.3=2.3.\frac{5}{7}=\frac{5}{7}.3.2=\ldots$

Вообще: $abc=acb=cab=\ldots$

7) *Чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя, затѣмъ на третьяго и т. д.*

Такъ, чтобы умножить 10 на произведеніе 3. 2. 4 (т.-е. на 24), достаточно умножить 10 на 3 (получимъ 30), потомъ умножить полученное произведеніе на 2 (получимъ 60) и послѣ этого на 4 (получимъ 240).

Такимъ образомъ: $10.(3.2.4)=10.3.2.4$

Вообще: $a(bcd)=abcd$

8) *Сомножителей произведенія можно соединять въ какія угодно группы.*

Напр., въ произведеніи 2. 5. 3. 4. 7 можно перемножить числа 2 и 5 между собою, потомъ перемножить числа 3, 4 и 7 между собою и первое произведеніе умножить на второе; или можно соединить сомножителей въ какія-либо другія группы.

9) *Чтобы раздѣлить на произведеніе, достаточно раздѣлить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго, потомъ на третьяго и т. д.*

Такъ: $400 : (4.2.5) = [(400 : 4) : 2] : 5 = (100 : 2) : 5 = 50 : 5 = 10$
Вообще: $a : (bcd) = [(a : b) : c] : d$

10) *Чтобы умножить произведенiе, достаточно умножить какого-либо одного сомножителя.*

Такъ, чтобы умножить произведенiе 10.2 на 5, достаточно умножить на 5 или множимое 10, или множителя 2; въ первомъ случаѣ получимъ 50.2=100 и во второмъ случаѣ будемъ имѣть: 10.10=100.

11) *Чтобы раздѣлить произведенiе, достаточно раздѣлить какого-либо одного сомножителя.*

Такъ, чтобы раздѣлить произведенiе 10.8 на 2, достаточно раздѣлить на 2 или 10, или 8; въ первомъ случаѣ получимъ 5.8=40 и во второмъ случаѣ 10.4=40.

9. Полезно замѣтить, что многiя изъ изложенныхъ выше истинъ можно, такъ сказать, перевернуть; напр., истину: „чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ", можно высказать обратно: *„чтобы прибавить нѣсколько чиселъ одно за другимъ, достаточно прибавить за разъ ихъ сумму"*; или истину: „чтобы умножить на произведенiе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя и т. д.", можно высказать обратно: *„вмѣсто того, чтобы умножать послѣдовательно на нѣсколько чиселъ, можно умножить сразу на произведенiе этихъ чиселъ"* и т. п.

10. Изложенныя истины позволяютъ дѣлать нѣкоторыя простѣйшiя преобразованiя алгебраическихъ выраженiй; напр. *):

1) $a+(b+a)=a+b+a=a+a+b=a2+b=2a+b$
2) $m+(a-m)=m+a-m=a+m-m=a$
3) $p-(q-p)=p+p-q=2p-q$
4) $a^2a^3=(aa)\ (aaa)=aaaaa=a^5$
5) $3aaaxxy=3(aaa)\ (xx)y=3a^3x^2y$
6) $\frac{9ab}{3}=\frac{9}{3}ab=3ab$

*) Всѣ эти примѣры рекомендуется основательно разобрать и объяснить; вообще, какъ показываетъ опытъ, для успѣшнаго прохожденiя основъ алгебры надо возможно лучше усвоить содержанiе этой главы.

ГЛАВА III.

Одночленъ и многочленъ.

11. Одночленъ. *Всякое алгебраическое выраженіе, въ которомъ послѣднее по порядку дѣйствіе не есть сложеніе или вычитаніе, а какое-нибудь иное, наз. одночленомъ.*

Напр., слѣдующія выраженія суть одночлены:

$(a-b)c$... послѣднее дѣйствіе—умноженіе;

$\frac{a+b}{c}$... послѣднее дѣйствіе—дѣленіе;

$(a+b)^2$... послѣднее дѣйствіе—возвышеніе въ степень;

abc, a^2b^2 } совсѣмъ нѣтъ дѣйствій сложенія и вычитанія.

Наоборотъ, слѣдующія выраженія не одночлены, потому что въ нихъ сложеніе или вычитаніе занимаетъ послѣднее по порядку мѣсто въ числѣ другихъ дѣйствій:

a^2+b^2..... послѣднее дѣйствіе—сложеніе;

$ax-by$..... послѣднее дѣйствіе—вычитаніе.

Отдѣльное число, выраженное буквою или цыфрами, также наз. одночленомъ; напр., a, x, 5, $^3/_4$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что одночленъ можетъ представлять собою: отдѣльное число, произведеніе, частное, степень, корень..., но не сумму и не разность.

Одночленъ наз. *раціональнымъ*, если онъ не содержитъ извлеченія корня; въ противномъ случаѣ онъ наз. *ирраціональнымъ*. Напр., ax^2 раціональный одночленъ; $\sqrt{ab}$ ирраціональный одночленъ.

Раціональный одночленъ наз. *цѣлымъ*, если не содержитъ буквенныхъ дѣлителей; въ противномъ случаѣ онъ наз. *дробнымъ*; напр.: $(a^2b^3)^2$ цѣлый одночленъ, $\frac{ab}{c}$ дробный одночленъ.

Въ началѣ курса мы будемъ разсматривать лишь раціональные и притомъ цѣлые одночлены.

Число буквенныхъ множителей, составляющихъ цѣлый одночленъ, наз. его *измѣреніемъ*; такъ, одночленъ $3a^2bc$ есть четвертаго измѣренія, одночленъ $10x^3$—третьяго измѣренія.

12. Коэффиціентъ. Численный сомножитель, стоящій передъ буквеннымъ выраженіемъ, наз. *коэффиціентомъ* этого выраженія. Такъ, въ одночленѣ $6abc$ число 6 есть коэффиціентъ при abc.

Цѣлый коэффиціентъ означаетъ, сколько разъ *повторяется слагаемымъ* буквенное выраженіе, къ которому онъ относится. Напр., $3ab=ab.3=ab+ab+ab$.

Дробный коэффиціентъ означаетъ, *какая дробь* берется отъ буквеннаго выраженія, къ которому онъ относится. Такъ, въ выраженіи $^5/_4x^2$ коэффиціентъ означаетъ, что отъ x^2 берется $^5/_4$, потому что $^5/_4x^2=x^2.^5/_4$, а умножить на $^5/_4$ значитъ взять $^5/_4$ отъ множимаго.

При одночленѣ, не имѣющемъ коэффиціента, можно подразумѣвать коэффиціентъ 1; такъ, ab все равно, что $1ab$.

Въ цѣлый одночленъ вообще могутъ входить: коэффиціентъ, буквенные множители и показатели при этихъ буквахъ; напр.: $3a^2b^3c$.

13. Многочленомъ *называется алгебраическое выраженіе, составленное изъ нѣсколькихъ одночленовъ, соединенныхъ между собою знаками + или —.* Таково, напр., выраженіе:

$$(ab)-(a^2)+(3b^2)-(2bc) \text{ или короче: } ab-a^2+3b^2-2bc.$$

Одночлены, изъ которыхъ составленъ многочленъ, наз. *членами его*. Обыкновенно члены многочлена разсматриваются вмѣстѣ съ тѣми знаками, которые стоятъ передъ ними; напр., говорятъ: членъ $-a^2$, членъ $+3b^2$ и т. п. Тѣ члены, передъ которыми стоитъ знакъ —, наз. *отрицательными*, остальные—*положительными*.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, наз. *двучленомъ* (или биномомъ), изъ трехъ членовъ—*трехчленомъ* и т. д.

Многочленъ наз. *раціональнымъ*, если всѣ его члены раціональные, и *цѣлымъ*, если всѣ его члены цѣлые.

Цѣлый многочленъ наз. *однороднымъ*, если всѣ его члены имѣютъ одинаковое измѣреніе. Напр., выраженіе: $2ab^2+a^3-5abc$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія.

14. Численная величина многочлена. Пусть требуется вычислить многочленъ:

$$2a^2-ab+b^2-\frac{1}{2}a+b$$

при такихъ значеніяхъ буквъ: $a=4$ и $b=3$. Для этого предварительно вычислимъ каждый членъ многочлена отдѣльно:

$$2a^2 = 2.4.4 = 32 \qquad ab = 4.3 = 12$$

$$b^2 = 3.3 = 9 \qquad \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

Затѣмъ надъ полученными числами произведемъ указанныя въ многочленѣ дѣйствія сложенія и вычитанія:

$$32 - 12 + 9 - 2 + 3 = 30$$

Можно считать очевиднымъ, что *численная величина многочлена не зависитъ отъ порядка его членовъ*. Такъ, располагая члены нашего многочлена въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ (сохраняя, конечно, при членахъ ихъ знаки и беря первый членъ, когда передъ нимъ не стоитъ никакого знака, со знакомъ $+$), мы всегда получимъ въ окончательномъ результатѣ число 30.

Часто употребляемый пріемъ при вычисленіи многочлена состоитъ въ слѣдующемъ: *чтобы найти численную величину многочлена, складываютъ всѣ положительные члены между собою и всѣ отрицательные между собою и изъ первой суммы вычитаютъ вторую*. Такъ, во взятомъ нами примѣрѣ численная величина равна:

$$(32 + 9 + 3) - (12 + 2) = 44 - 14 = 30.$$

Замѣчаніе. Если станемъ переставлять члены многочлена наудачу (сохраняя, конечно, при нихъ ихъ знаки), то иногда можемъ расположить ихъ въ такомъ порядкѣ, въ какомъ невозможно сдѣлать вычисленіе. Напр., было бы невозможно произвести дѣйствія въ такомъ порядкѣ: $3 - 12 - 2 + {}$ $+ 32 + 9$, потому что нельзя изъ 3 вычесть 12. Въ подобныхъ случаяхъ надо или поступить по указанному выше правилу, т.-е. сложить всѣ положительные члены, потомъ всѣ отрицательные и изъ первой суммы вычесть вторую, или же переставить члены въ такомъ порядкѣ, при которомъ не встрѣчалось бы невозможнаго вычитанія.

Можетъ, однако, случиться, что многочленъ невозможенъ при всякомъ порядкѣ его членовъ, а именно тогда, когда

сумма положительныхъ членовъ меньше суммы отрицательныхъ. Напр., многочленъ: $2-1+3-8$ невозможенъ, какъ бы мы ни переставляли его члены, потому что $2+3<1+8$.

ГЛАВА IV.

Приведеніе подобныхъ членовъ.

15. Опредѣленіе. *Члены многочлена, отличающіеся только коэффиціентами или знаками, или же не отличающіеся ничѣмъ, наз. подобными.* Напр., въ такомъ многочленѣ:

$$\underline{4a^2b^3} - \underline{\underline{3ab}} + \underline{0,5a^2b^3} + 3a^2c + \underline{\underline{8ab}}$$

первый членъ подобенъ третьему, потому что отличается отъ него только коэффиціентомъ, второй членъ подобенъ пятому, потому что отличается отъ него только знакомъ и коэффиціентомъ. Членъ $3a^2c$ не имѣетъ себѣ подобныхъ, потому что онъ отличается отъ остальныхъ буквами и показателями при нихъ.

16. Когда въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены, то его можно упростить, соединяя всѣ подобные между собою члены въ одинъ. Такое соединеніе наз. *приведеніемъ подобныхъ членовъ*. Разсмотримъ сначала:

1-й случай, когда всѣ подобные члены имѣютъ одинаковые знаки.

Примѣры:

I. $3a^2 + \underline{2ab^2} + \underline{5ab^2} + \underline{0,6ab^2}$

II. $10x^3 - \underline{3mx} - \underline{7mx} - \underline{{}^3/_4 mx}$

Вмѣсто того, чтобы прибавлять или отнимать числа отдѣльно, мы можемъ прибавить или отнять ихъ сумму; поэтому данные два многочлена можемъ написать такъ:

I. $3a^2 + (2ab^2 + 5ab^2 + 0,6ab^2)$

II. $10x^3 - (3mx + 7mx + {}^3/_4 mx)$

Но 2 какихъ-нибудь числа, да 5 такихъ же чиселъ, да 0,6 такого же числа составляютъ 7,6 такихъ же чиселъ; поэтому:

$$2ab^2 + 5ab^2 + 0,6ab^2 = 7,6ab^2$$

Точно такъ же $3mx + 7mx + {}^3/_4 mx = 10{}^3/_4 mx$

Теперь данные многочлены могутъ быть написаны такъ:

I. $3a^2+7,6ab^2$ II. $10x^3-10^3/_4 mx$

Правило. *Чтобы соединить въ одинъ нѣсколько подобныхъ членовъ съ одинаковыми знаками, надо сложить ихъ коэффиціенты, оставить то же самое буквенное выраженіе и поставить тотъ же знакъ, какой имѣли отдѣльные члены.*

17. 2-й случай, когда подобныхъ членовъ два и они имѣютъ разные знаки.

Примѣры: I. $a+\underline{8b}-\underline{3b}$ II. $a-\underline{8b}+\underline{3b}$

Въ многочленѣ I прибавляется 8 нѣкоторыхъ чиселъ, а отнимается 3 такихъ же числа; это все равно, что прибавляется 8 — 3, т.-е. 5 такихъ же чиселъ; значитъ, члены $+8b-3b$ можно замѣнить однимъ $+5b$. Въ многочленѣ II отнимается 8 нѣкоторыхъ чиселъ, а прибавляется 3 такихъ же числа; это все равно, что отнимается 8 — 3, т.-е. 5 такихъ же чиселъ; значитъ, члены $-8b+3b$ можно замѣнить однимъ $-5b$. Такимъ образомъ данные многочлены можно переписать такъ:

I. $a+5b$ II. $a-5b$

Правило. *Чтобы соединить въ одинъ два подобные члена съ разными знаками, надо изъ большаго коэффиціента вычесть меньшій, оставить то же самое буквенное выраженіе и поставить знакъ большаго коэффиціента.*

Если коэффиціенты двухъ подобныхъ членовъ одинаковы, а знаки разные, то такіе члены сокращаются, т.-е. ихъ можно отбросить; напр.: $a+3b-3b=a$.

18. Общій случай, когда въ многочленѣ встрѣчается болѣе двухъ подобныхъ членовъ съ различными знаками. Тогда поступаютъ такъ: *соединяютъ всѣ положительные подобные члены въ одинъ, а отрицательные въ другой, и затѣмъ полученные два члена соединяютъ въ одинъ.* Напр.:

I. $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+(5mx+7mx)-(2mx+8mx)=$
$=a+12mx-10mx=a+2mx$

II. $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=(4ax+2ax)-(7ax+3ax)+b^2=$
$=6ax-10ax+b^2=-4ax+b^2=b^2-4ax$

ОТДѢЛЪ II.

Первыя четыре алгебраическія дѣйствія.

Общее замѣчаніе. Всѣ *алгебраическія* дѣйствія представляютъ собою *преобразованіе* одного алгебраическаго выраженія въ другое, *тождественное* первому. Такъ, сложеніе многочленовъ есть преобразованіе суммы многочленовъ въ одинъ многочленъ, тождественный съ суммою данныхъ многочленовъ; умноженіе одночленовъ есть преобразованіе произведенія одночленовъ въ новый одночленъ, тождественный съ этимъ произведеніемъ, и т. п.

ГЛАВА I.

Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

19. Сложеніе цѣлыхъ одночленовъ состоитъ лишь въ указаніи этого дѣйствія знакомъ $+$ и въ приведеніи подобныхъ членовъ, если они окажутся. Напр., сумма одночленовъ: $3a$, $5b$, $0,2a$, $7b$ и c выразится такъ: $3a+5b+0,2a+7b+c$, что послѣ приведенія подобныхъ членовъ дастъ: $3,2a+12b+c$.

20. Сложеніе многочленовъ. Пусть требуется къ какому-нибудь числу A приложить многочленъ $a-b+c-d$: *)

$$A+(a-b+c-d) \qquad [1]$$

Желая преобразовать это выраженіе, разсуждаемъ такъ: многочленъ $a-b+c-d$ есть разность, въ которой уменьшаемое равно $a-b+c$, а вычитаемое d; но чтобы прибавить

*) Предполагаемъ, что члены многочлена расположены въ такомъ порядкѣ, при которомъ не встрѣчается невозможнаго вычитанія.

разность, достаточно прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое; поэтому выраженіе [1] можно преобразовать такъ:

$$A + (a - b + c) - d \qquad [2]$$

Многочленъ $a - b + c$ есть сумма двухъ слагаемыхъ: $a - b$ и c; чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое отдѣльно одно за другимъ; поэтому выраженіе [2] преобразуется такъ:

$$A + (a - b) + c - d \qquad [3]$$

Наконецъ, чтобы прибавить къ A разность $a - b$, достаточно къ A прибавить a и вычесть b; поэтому выраженіе [3] можно представить такъ:

$$A + a - b + c - d$$

Правило. *Чтобы прибавить многочленъ къ какому-нибудь числу, достаточно приписать къ этому числу всѣ члены многочлена одинъ за другимъ съ ихъ знаками* (при чемъ предъ тѣмъ членомъ, при которомъ не стоитъ никакого знака, должно подразумѣвать знакъ $+$).

Примѣръ: $(3a^2 - 5ab + b^2) + (4ab - b^2 + 7a^2)$.

То, что мы обозначали прежде буквой A, дано теперь въ видѣ многочлена $3a^2 - 5ab + b^2$. Примѣняя указанное правило сложенія, найдемъ:

$$(3a^2 - 5ab + b^2) + (4ab - b^2 + 7a^2) = (3a^2 - 5ab + b^2) + 4ab - b^2 + 7a^2$$

Въ полученномъ результатѣ скобки могутъ быть отброшены, потому что отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится:

$$3a^2 - 5ab + b^2 + 4ab - b^2 + 7a^2$$

Приведя въ этомъ многочленѣ подобные члены, получимъ окончательно:

$$10a^2 - ab$$

21. Если данные многочлены содержатъ *подобные члены*, то полезно писать слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными; напр.:

$$+\left\{\begin{array}{lll} 3ax^2 & -\,{}^1/_2a^2x & +\,2a^3 \\ -\,5ax^2 & +\,7a^2x & -\,a^3 \\ {}^3/_4ax^2 & -\,2a^2x & +\,0{,}3a^3 \end{array}\right.$$
$$\overline{-\,1^1/_4ax^2 + 4^1/_2a^2x + 1{,}3a^3}$$

22. Вычитаніе цѣлыхъ одночленовъ состоитъ въ указаніи этого дѣйствія знакомъ — и въ приведеніи подобныхъ членовъ, если они окажутся. Такъ, разность отъ вычитанія $3m^2$ изъ $8m^2$ выразится: $8m^2 - 3m^2 = 5m^2$.

23. Вычитаніе многочлена. Пусть требуется изъ какого-нибудь числа A вычесть многочленъ $a - b + c$*):

$$A - (a - b + c) \qquad [1]$$

Желая преобразовать это выраженіе, разсуждаемъ такъ: многочленъ $a-b+c$ есть сумма двухъ слагаемыхъ: $a-b$ и c; чтобы вычесть сумму, достаточно вычесть каждое слагаемое одно за другимъ; поэтому выраженіе [1] преобразуется такъ:

$$A - (a - b) - c \qquad [2]$$

Чтобы вычесть разность $a - b$, достаточно прибавить вычитаемое и вычесть уменьшаемое; поэтому выраженіе [2] преобразуется такъ:

$$A + b - a - c \qquad \text{или} \qquad A - a + b - c.$$

Правило. *Чтобы вычесть многочленъ, достаточно приписать къ уменьшаемому всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками.*

Если въ многочленахъ есть *подобные члены*, то вычитаемый многочленъ полезно писать подъ уменьшаемымъ, перемѣняя у вычитаемаго многочлена знаки на обратные; напр., вычитаніе:

$$(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 - 2b^2 + 4ab)$$

всего удобнѣе располагать такъ:

$$\begin{array}{r} 7a^2 - 2ab + b^2 \\ \underline{\pm 5a^2 \pm 4ab \mp 2b^2} \\ 2a^2 - 6ab + 3b^2 \end{array}$$

(въ вычитаемомъ многочленѣ верхніе знаки поставлены тѣ, какіе были даны, а внизу они перемѣнены на обратные).

24. Раскрытіе скобокъ, предъ которыми стоитъ знакъ + или —. Пусть требуется *раскрыть скобки* въ выраженіи:

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c).$$

---

*) Предполагаемъ, что члены многочлена расположены въ такой послѣдовательности, при которой не встрѣчается невозможнаго вычитанія.

Это надо понимать такъ, что требуется надъ многочленами, стоящими внутри скобокъ, произвести тѣ дѣйствія, которыя указываются знаками передъ скобками. Произведя эти дѣйствія по правиламъ сложенія и вычитанія, получимъ:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c$$

Изъ правилъ сложенія и вычитанія многочленовъ слѣдуетъ, что, раскрывая скобки, предъ которыми стоитъ $+$, мы не должны измѣнять знаковъ внутри скобокъ, а раскрывая скобки, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, мы должны передъ всѣми членами, стоящими внутри скобокъ, измѣнить знаки на обратные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Для этого раскроемъ сначала внутреннія скобки, а затѣмъ внѣшнія:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

Можно поступать и въ обратномъ порядкѣ, т.-е. сначала раскрыть внѣшнія скобки, а потомъ внутреннія. Раскрывая внѣшнія скобки, мы должны принимать многочленъ, стоящій во внутреннихъ скобкахъ, за одночленъ и поэтому не должны измѣнять знаковъ внутри этихъ скобокъ:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4] = 10p - 3p - (5p - 10) + 4 =$$
$$10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

25. Заключеніе въ скобки. Для преобразованія многочлена часто бываетъ полезно заключить въ скобки совокупность нѣкоторыхъ его членовъ, причемъ передъ скобками иногда желательно поставить $+$, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ суммы, а иногда $-$, т.е. изобразить многочленъ въ видѣ разности. Пусть, напр., въ многочленѣ $a + b - c$ мы желаемъ заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ $+$. Тогда пишемъ такъ:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

т.-е. внутри скобокъ оставляемъ тѣ же знаки, какіе были въ данномъ многочленѣ. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу сложенія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Пусть въ томъ же многочленѣ $a+b-c$ требуется заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ *минусъ*. Тогда пишемъ такъ:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b),$$

т.-е. внутри скобокъ передъ всѣми членами перемѣняемъ знаки на обратные. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу вычитанія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

ГЛАВА II.

Отрицательное число и нуль.

26. Заключая въ скобки часть многочлена, мы можемъ иногда встрѣтить затрудненіе, а именно тогда, когда эта часть многочлена представляетъ собою невозможную разность. Напр., нельзя написать безъ особыхъ условій:

$$10+2-5=10+(2-5),$$

потому что разность $2-5$ невозможна.

Чтобы имѣть возможность заключать въ скобки какую угодно часть многочлена независимо отъ численныхъ значеній буквъ, а также и для другихъ цѣлей, которыя выяснятся впослѣдствіи, въ алгебру вводятъ нѣкоторыя условія.

27. Условія. 1) *Разность между одинаковыми числами принимается равной 0*. Такъ: $7-7=0$.

2) *Разность между меньшимъ числомъ и большимъ принимается равной избытку большаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ минусъ*. Такъ: $7-10=-3$; $p-(p+q)=-q$

Число съ предшествующимъ ему знакомъ минусъ называется *отрицательнымъ*; *абсолютной величиной* отрицательнаго числа наз. это число, взятое безъ знака. Такъ, абсолютная величина числа -3 есть 3. Обыкновенное число часто называютъ *положительнымъ*; передъ нимъ иногда ставятъ знакъ $+$.

Слѣдствія. 1) *Придать къ числу 0 значитъ оставить это число безъ измѣненія.*

Дѣйствительно, изъ условія $7-7=0$ по опредѣленію вычитанія слѣдуетъ:

$$\underset{\text{вычитаемое}}{7} + \underset{\text{остатокъ}}{0} = \underset{\text{уменьшаемое}}{7}$$

2) *Придать отрицательное число значитъ вычесть его абсолютную величину.*

Дѣйствительно, изъ условія $7-10=-3$, по опредѣленію вычитанія, слѣдуетъ:

$$\underset{\text{вычитаемое}}{10} + \underset{\text{остатокъ}}{(-3)} = \underset{\text{уменьшаемое}}{7}$$

3) *Вычесть изъ числа 0 значитъ оставить это число безъ измѣненія*; такъ, $7-0=7$.

Дѣйствительно, по опредѣленію вычитанія, вычесть 0 изъ 7 значитъ найти такое число, которое при сложеніи съ 0 даетъ въ суммѣ 7; а такое число есть само 7.

4) *Отнять отрицательное число значитъ придать его абсолютную величину*; такъ, $7-(-3)=7+3=10$.

Дѣйствительно, вычесть -3 изъ 7 значитъ, по опредѣленію вычитанія, найти такое число, которое при сложеніи съ -3 даетъ въ суммѣ 7; такое число есть 10, такъ какъ $10+(-3)=7$.

28. Первое значеніе этихъ условій. При помощи поставленныхъ нами условій *можно заключать въ скобки какую угодно часть многочлена при всякихъ значеніяхъ буквъ*. Напр., равенство:

$$10+2-5=10+(2-5)$$

вѣрно, потому что лѣвая его часть составляетъ 7 и правая равна $10+(-3)=10-3=7$. Точно такъ же вѣрно равенство:

$$10-2+5=10-(2-5),$$

потому что $10-2+5=13$ и $10-(2-5)=10-(-3)=10+3=13$.

Вообще, *формулы сложенія и вычитанія*: $a+(b-c)=a+b-c$ и $a-(b-c)=a-b+c$ *остаются вѣрными и въ томъ случаѣ, когда* $b<c$ *или* $b=c$.

29. Второе значеніе этихъ условій. При помощи отрицательныхъ чиселъ всякій многочленъ можно представить *въ видѣ суммы*. Напр., $20-5+3-7$ можно написать такъ:

$$20+(-5)+3+(-7) \text{ или: } +20+(-5)+(+3)+(-7)$$

Наоборотъ, сумму можно представить *въ видѣ разности*; такъ, сумму $8+2$ можно написать:

$$8-(-2) \text{ или. } (+8)-(-2).$$

Впослѣдствіи мы увидимъ, что возможность изображать сумму въ видѣ разности или разность въ видѣ суммы имѣетъ весьма большое значеніе въ алгебрѣ.

Замѣтимъ, что сумма, въ которой слагаемыя могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, наз. *алгебраическою суммою* въ отличіе отъ ариѳметической, въ которой слагаемыя всегда числа положительныя. Подобно этому *алгебраическою разностью* называется такая разность, въ которой уменьшаемое и вычитаемое могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю.

Вообще, буквенное выраженіе, въ которомъ буквы могутъ означать числа положительныя, отрицательныя и равныя нулю, называется *алгебраическимъ количествомъ*.

Алгебраическая сумма, какъ и ариѳметическая, обладаетъ свойствомъ *перемѣстительности*, т.-е. она не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ; такъ: $3+(-2)=(-2)+3$.

30. Третье значеніе этихъ условій При помощи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ есть возможность разсматривать совмѣстно такъ называемыя *противоположныя величины*, напр., выигрышъ и проигрышъ, прибыль и убытокъ, имущество и долгъ, температуру выше 0^0 и температуру ниже 0^0, движеніе впередъ и движеніе назадъ и т. п. Для уясненія возьмемъ нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1. Нѣкто сыгралъ 4 игры. Въ первую онъ выигралъ 2 руб., во вторую проигралъ 5 руб., въ третью проигралъ 4 руб., въ четвертую выигралъ 3 руб. Спрашивается сколько игрокъ выигралъ или проигралъ за 4 игры?

При обыкновенномъ способѣ рѣшенія этой задачи приходится совершать два дѣйствія: сложеніе и вычитаніе. Отрицательныя числа позволяютъ замѣнить эти два дѣйствія

однимъ: сложеніемъ. Условимся обозначать выигрышъ положительными числами, а проигрышъ отрицательными, и разсматривать проигрышъ, какъ *отрицательный выигрышъ*. Тогда мы можемъ высказать нашу задачу такъ:

Нѣкто сыгралъ 4 игры. Въ первую онъ выигралъ +2 руб., во вторую выигралъ —5 руб., въ третью выигралъ —4 руб., въ четвертую выигралъ +3 рубля. Какъ великъ весь выигрышъ?

Для рѣшенія задачи сложимъ всѣ выигрыши:

$$+2+(-5)+(-4)+(+3)=(+5)+(-9)=-4$$

Выигрышъ оказался —4 руб., т.-е., другими словами, за 4 игры было проиграно 4 рубля.

Примѣръ 2. Купецъ велъ три торговыя дѣла; въ первомъ онъ получилъ прибыли 4000 рублей, во второмъ—убытка 3500 руб., въ третьемъ—прибыли 2700 руб. Сколько прибыли или убытка получилъ купецъ во всѣхъ трехъ дѣлахъ?

Условимся обозначать прибыль положительными числами, а убытокъ отрицательными, и разсматривать убытокъ, какъ *отрицательную прибыль*. Тогда мы можемъ высказать задачу такъ:

Купецъ велъ три торговыя дѣла; въ первомъ онъ получилъ прибыли +4000 руб., во второмъ —3500 руб., и въ третьемъ +2700 руб. Сколько всего получилъ онъ прибыли?

Для рѣшенія задачи надо сложить всѣ три прибыли:

$$+4000+(-3500)+(+2700)=+6700+(-3500)=$$
$$=6700-3500=+3200$$

Такимъ образомъ, купецъ получитъ прибыли 3200 руб.

Примѣръ 3. Старшій братъ имѣетъ имущества на 15000 рублей; младшій братъ не имѣетъ имущества, а, наоборотъ, состоитъ должнымъ 2000 руб. Насколько старшій братъ имѣетъ болѣе, чѣмъ младшій?

Условимся обозначать имущество положительными числами, а долгъ отрицательными, и разсматривать долгъ, какъ *отрицательное имущество*. Тогда мы можемъ высказать задачу такъ:

Старшій братъ имѣетъ имущества на 15000 руб., а младшій на—2000 руб. На сколько у старшаго больше, чѣмъ у младшаго?

Для рѣшенія задачи надо изъ имущества старшаго брата вычесть имущество младшаго:

$$15000-(-2000)=15000+2000=17000$$

Старшій братъ имѣетъ болѣе младшаго на 17000 руб.

Возможность разсматривать совмѣстно противоположныя величины позволяетъ во многихъ случаяхъ *обобщать* вопросы, т.-е. нѣсколько отдѣльныхъ частныхъ вопросовъ соединять въ одинъ общій.

30, *a*. Обобщеніе правилъ сложенія и вычитанія. Выведенныя нами правила сложенія и вычитанія распространяются и на многочлены алгебраическіе, т.-е. такіе, у которыхъ буквы означаютъ числа какія угодно. Въ этомъ легко убѣдиться провѣркою. Пусть, напр., требуется доказать, что равенство:

$$A+(a+b-c)=A+a+b-c$$

остается вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда подъ буквами a, b и c будемъ разумѣть числа отрицательныя или равныя нулю. Предположимъ, напр., что $a=-3$, $b=-2$ и $c=-8$. Подставивъ эти значенія въ обѣ части написаннаго выше равенства, получимъ:

$$A+[-3+(-2)-(-8)]=A+(-3)+(-2)-(-8)$$

что, согласно условіямъ о сложеніи и вычитаніи отрицательныхъ чиселъ, дастъ:

$$A+[-3-2+8]=A-3-2+8$$

Это равенство вѣрно, потому что, приложивъ къ A многочленъ $-3-2+8$ дѣйствительно получимъ $A-3-2+8$.

Такъ же убѣдимся, что равенство:

$$A-(a+b-c)=A-a-b+c$$

остается вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда подъ буквами a, b и c будемъ подразумѣвать числа отрицательныя или равныя нулю.

ГЛАВА III.

Алгебраическое умноженіе.

31. Основныя истины. Алгебраическое умноженіе цѣлыхъ одночленовъ основывается на слѣдующихъ извѣстныхъ изъ ариѳметики истинахъ (§ 8):

1) *Произведенiе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей.*

2) *Чтобы умножить на произведенiе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя и т. д.*

3) *Сомножителей произведенiя можно соединять въ какiя угодно группы.*

32. Умноженiе степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^4 на a^3; другими словами, требуется умножить a^4 на произведенiе трехъ сомножителей: aaa. Для этого достаточно умножить a^4 на a, полученный результатъ еще на a и что получится—снова на a. Слѣд.:

$$a^4a^3=a^4(aaa)=aaaaaaa=a^{4+3}=a^7$$

$$\text{Вообще: } a^ma^n=\overbrace{aaa\ldots.a}^{m \text{ разъ}}\;.\;\overbrace{aaa\ldots.a}^{n \text{ разъ}}=a^{m+n}$$

Правило. *При умноженiи степеней одного и того же числа показатели ихъ складываются.*

Примѣры: 1) $aa^6=a^{6+1}=a^7$; 2) $m^{10}m^3=m^{10+3}=m^{13}$

3) $x^{2n}x^{3n}=x^{2n+3n}=x^{5n}$

4) $p^{r-2}p^{r+2}=p^{(r-2)+(r+2)}=p^{r-2+r+2}=p^{2r}$

33. Умноженiе цѣлыхъ одночленовъ. Пусть дано умножить $3a^2b^3c$ на $5a^3b^4d^2$. Такъ какъ $5a^3b^4d^2$ есть произведенiе $5.a^3.b^4.d^2$, то для умноженiя $3a^2b^3c$ на $5a^3b^4d^2$ достаточно умножить множимое на 5, результатъ на a^3 и т. д. Значитъ:

$$(3a^2b^3c)(5a^3b^4d^2)=(3a^2b^3c)5a^3b^4d^2=3a^2b^3c\ 5a^3b^4d^2$$

Въ полученномъ произведенiи мы можемъ соединить сомножителей въ такiя группы:

$$(3.5)(a^2a^3)(b^3b^4)cd^2=15a^5b^7cd^2.$$

Правило. *Чтобы перемножить цѣлые одночлены, достаточно перемножить ихъ коэффицiенты, сложить показателей одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, перенести въ произведенiе съ ихъ показателями.*

Примѣры: 1) $(0,7a^3xy^2)(3a^4x^2)=2,1a^7x^3y^2$;

2) $(^1/_2mz^3)^2=(^1/_2mz^3)(^1/_2mz^3)=^1/_4m^2z^6$

3) $(1,2a^rm^{n-1})(^3/_4am)=0,9a^{r+1}m^n$.

34. Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно. Пусть дано умножить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m:

$$(a+b-c)m$$

Желая преобразовать это выраженіе, разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе 3 случая:

1) m *есть цѣлое число*, напр., $m=3$. Умножить $a+b-c$ на 3 значитъ повторить $a+b-c$ слагаемымъ 3 раза; поэтому

$$(a+b-c)3=(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)$$
$$=a+b-c+a+b-c+a+b-c=3a+3b-3c.$$

2) m *есть дробь, у которой числитель равенъ 1*, напр., $m=^1/_5$. Умножить $a+b-c$ на $^1/_5$ значитъ найти $^1/_5$ отъ $a+b-c$. Докажемъ, что $^1/_5$ отъ $a+b-c$ равна $^a/_5+^b/_5-^c/_5$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, посмотримъ, что получится, когда мы умножимъ $^a/_5+^b/_5-^c/_5$ на 5; если въ произведеніи получимъ $a+b-c$, то, значитъ, пятая часть отъ $a+b-c$ есть дѣйствительно $^a/_5+^b/_5-^c/_5$. Такъ какъ 5 есть число цѣлое, то для умноженія многочлена $^a/_5+^b/_5-^c/_5$ на 5 достаточно умножить на 5 каждый членъ этого многочлена (какъ слѣдуетъ изъ перваго случая):

$$\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}-\frac{c}{5}\right).5=\frac{a}{5}.5+\frac{b}{5}.5-\frac{c}{5}.5=a+b-c$$

Значитъ: $(a+b-c)\frac{1}{5}=\frac{a}{5}+\frac{b}{5}-\frac{c}{5}=a\,.\frac{1}{5}+b\,.\frac{1}{5}-c\,.\frac{1}{5}$

3) m *есть дробь какого угодно вида*, напр., $m=^7/_5$. Умножить $a+b-c$ на $^7/_5$ значитъ найти $^7/_5$ отъ $a+b-c$, для чего достаточно найти $^1/_5$ отъ $a+b-c$ и результатъ умножить на 7. Но $^1/_5$ отъ $a+b-c$, по доказанному, равна $^a/_5+^b/_5-^c/_5$; слѣд., $^7/_5$ отъ $a+b-c$ равны $(^a/_5+^b/_5-^c/_5)\ 7$; такъ какъ 7 есть число цѣлое, то для умноженія $^a/_5+^b/_5-^c/_5$ на 7 достаточно умножить на 7 каждый членъ этого многочлена:

$$\frac{a}{5}\cdot 7+\frac{b}{5}\cdot 7-\frac{c}{5}.7=a.\frac{7}{5}+b.\frac{7}{5}-c.\frac{7}{5}$$

Значитъ: $(a+b-c)\frac{7}{5}=a.\frac{7}{5}+b.\frac{7}{5}-c.\frac{7}{5}$

Такимъ образомъ, какова бы ни была численная величина одночлена m, всегда:

$$(a+b-c)m=am+bm-cm$$

Правило. *Чтобы умножить многочленъ на положительный одночленъ, достаточно умножить на этотъ одночленъ каждый членъ многочлена* (причемъ знаки множимаго не измѣняются).

Такъ какъ произведенiе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, то это правило примѣнимо также и къ умноженiю одночлена на многочленъ.

Примѣры.

1) $(a^2-ab+b^2)3a=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=3a^3-3a^2b+3ab^2$

2) $(7x^3+{}^3/_4ax-0{,}3)(2{,}1a^2x)=(7x^3)(2{,}1a^2x)+({}^3/_4ax)(2{,}1a^2x)-$
$-(0{,}3)(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^4+1{,}575a^3x^2-0{,}63a^2x$

35. Умноженiе многочлена на многочленъ. Пусть дано умножить:

$$(a+b-c)(d-e)$$

Разсматривая множимое, какъ одночленъ, можемъ сдѣлать умноженiе по правилу умноженiя одночлена на многочленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=(a+b-c)d-(a+b-c)e$$

Разсматривая теперь $a+b-c$, какъ многочленъ, можемъ вторично примѣнить правило умноженiя многочлена на одночленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-(ae+be-ce)$$

Наконецъ, раскрывъ скобки по правилу вычитанiя, получимъ:

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-ae-be+ce$$

Всматриваясь въ полученный результатъ, можемъ замѣтить слѣдующее правило:

Правило. *Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, достаточно каждый членъ множимаго умножить на каждый*

членъ множителя и тѣ произведенія, которыя произошли отъ умноженія положительныхъ или отрицательныхъ членовъ, взять со знакомъ $+$, *а тѣ, которыя произошли отъ умноженія положительнаго члена на отрицательный или отрицательнаго на положительный, взять со знакомъ* $-$.

Правило знаковъ сокращенно выражаютъ такъ: *при умноженіи одинаковые знаки даютъ* $+$, *разные знаки даютъ* $-$.

Замѣчаніе о порядкѣ умноженія. Чтобы при умноженіи многочленовъ не пропустить ни одного произведенія, полезно всегда держаться *одного* какого-нибудь порядка умноженія, напр., умножить сначала всѣ члены множимаго на 1-й чл. множителя, затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя и т. д.

Примѣры: 1) $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+bn-ap+bp$;

2) $(x^2-y^2)(x+y)=x^2x-y^2x+x^2y-y^2y=$
$=x^3-y^2x+x^2y-y^3$;

3) $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=(3an)n^2+(2n^2)n^2-$
$-(4a^2)n^2-(3an)(5an)-(2n^2)(5an)+(4a^2)(5an)=$
$=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+20a^3n=$
$=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n$;

4) $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-$
$-3(2a^2)+9=4a^4-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9$.

36. Для упражненія въ примѣненіи правила знаковъ иногда задаютъ **примѣры умноженія отрицательныхъ членовъ, взятыхъ отдѣльно**, а также примѣры умноженія многочленовъ на отрицательные члены, взятые отдѣльно. Напр.

1) $(4a^nb^3)(-7ab^n)=-28a^{n+1}b^{n+3}$; 2) $(-3{,}5x^2y)(^3/_4x^3)=-^{21}/_8x^5y$;
3) $(5x^{n-1}-3x^{n-2}+1)(-2x)=-10x^n+6x^{n-1}-2x$.

ГЛАВА IV.

Умноженіе отрицательныхъ чиселъ.

37. Условія. 1) *Перемножить два какія угодно числа значитъ перемножить ихъ абсолютныя величины и произведеніе взять со знакомъ* $+$, *если оба сомножителя имѣютъ*

одинаковые знаки, и со знакомъ —, *если они имѣютъ разные знаки.*

Такъ: $(+3)(-2)=-6$; $(-2)(+5)=-10$; $(-4)(-6)=+24$; $(+2)(+3)=+6$.

2) *Если одинъ или оба сомножителя нули, то произведенiе принимается равнымъ нулю*, т.-е. $a.0=0$, $0.a=0$, $0.0=0$.

Замѣтимъ, что эти условiя находятся въ согласiи съ перемѣстительнымъ свойствомъ умноженiя, по которому произведенiе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей; дѣйствительно:

$$(+a)(-b)=-ab \text{ и } (-b)(+a)=-ba=-ab$$
$$(-a)(-b)=+ab \text{ и } (-b)(-a)=+ba=+ab$$
$$0.a=0 \text{ и } a.0=0$$

38. Значенiе этихъ условiй. При соблюденiи этихъ условiй *правила умноженiя многочленовъ можно примѣнять и въ томъ случаѣ, когда численная величина многочлена отрицательна или равна* 0. Умножимъ, напр., разность $5-7$ на 3 по правилу умноженiя многочлена на одночленъ:

$$(5-7)3=5.3-7.3$$

Это равенство вѣрно, потому что

$$(5-7)3=(-2)3=-6 \text{ и } 5.3-7.3=15-21=-6$$

Умножимъ еще $7-10$ на $3-5$ по правилу умноженiя многочлена на многочленъ:

$$(7-10)(3-5)=7.3-10.3-7.5+10.5$$

Это равенство тоже вѣрно, потому что $(7-10)(3-5)=$ $=(-3)(-2)=+6$ и правая часть равенства равна: $21-30-$ $-35+50=+6$.

39. Знакъ произведенiя. Когда перемножается нѣсколько чиселъ, изъ которыхъ нѣкоторыя (или всѣ) отрицательныя, то *произведенiе окажется со знакомъ* + *въ томъ случаѣ, когда отрицательныхъ сомножителей четное число, и со знакомъ*—*въ томъ случаѣ, когда этихъ сомножителей нечетное число.* Пусть, напр., дано вычислить произведенiе:

$(-2)(+3)(-5)(+10)(-4)(-2)$, въ которомъ отрицательные сомножители входятъ въ четномъ числѣ. Произведя послѣдовательно умноженія по даннымъ выше правиламъ, найдемъ: $(-2)(+3)=-6$; $(-6)(-5)=+30$; $(+30)(+10)=$ $=+300$; $(+300)(-4)=-1200$; $(-1200)(-2)=+2400$. Пусть теперь дано вычислить произведеніе: $(-2)(-1)$ $(+3)(-4)$, въ которомъ отрицательные сомножители входятъ въ нечетномъ числѣ; произведя послѣдовательно умноженія, получимъ:

$$(-2)(-1)=+2;\ (+2)(+3)=+6;\ (+6)(-4)=-24$$

Чтобы убѣдиться въ общности этого свойства, примемъ во вниманіе слѣдующія два свойства произведенія:

1) Отъ умноженія на положительное число знакъ *множимаго* не измѣняется ($+$ на $+$ даетъ $+$; $-$ на $+$ даетъ $-$), а отъ умноженія на отрицательное число онъ перемѣняется ($+$ на $-$ даетъ $-$; $-$ на $-$ даетъ $+$);

2) Не измѣняя ни величины, ни знака произведенія, мы можемъ въ началѣ его приписать множителя $+1$; такъ, произведенія $(+2)(-3)$ и $(-2)(-3)$ одинаковы съ такими:

$$(+1)(+2)(-3) \text{ и } (+1)(-2)(-3).$$

Замѣтивъ это, возьмемъ произведеніе:

$$(+1)abcd\ldots..$$

въ которомъ нѣкоторые сомножители числа отрицательныя. Отъ умноженія $+1$ послѣдовательно на $a, b, c, \ldots$, знакъ $+$ перемѣнится столько разъ, сколько встрѣтится отрицательныхъ множителей; значитъ, если этихъ множителей четное число, то знакъ $+$ перемѣнится четное число разъ, а если ихъ нечетное число, то и знакъ $+$ перемѣнится нечетное число разъ. Но, очевидно, что знакъ $+$, измѣнившись четное число разъ, остается $+$, а измѣнившись нечетное число разъ, онъ дѣлается $-$. Отсюда выводится указанное выше свойство.

40. Обобщеніе правила умноженія многочленовъ. Легко также показать, что *правила умноженія многочленовъ примѣнимы и къ такимъ много-*

членамъ, у которыхъ члены числа отрицательныя или равныя нулю. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою. Возьмемъ, напр., два многочлена $a-b$ и $c-d$ и умножимъ ихъ по извѣстному правилу:

$$(a-b)\ (c-d)=ac-bc-ad+bd$$

Теперь предположимъ, что какой-нибудь членъ, напр., b, сдѣлался отрицательнымъ числомъ. Пусть, напр., $b=-3$. Подставивъ -3 на мѣсто b въ обѣ части равенства, получимъ:

$$[a-(-3)]\ (c-d)=ac-(-3)c-ad+(-3)d$$

или: $(a+3)\ (c-a)=ac-(-3c)-ad+(-3d)$

наконецъ: $(a+3)\ (c-d)=ac+3c-ad-3d.$

Это равенство вѣрно, потому что, умноживъ $a+3$ на $c-d$, получимъ, дѣйствительно, $ac+3c-ad-3d$.

41. Обобщеніе правила умноженія одночленовъ. Легко убѣдиться, что *правило умноженія одночленовъ примѣнимо и въ томъ случаѣ, когда буквы означаютъ числа отрицательныя или равныя нулю.* Разъяснимъ, напр., что истина, на которой основанъ выводъ этого правила, именно неизмѣняемость произведенія отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, остается вѣрною и тогда, когда сомножители будутъ числа отрицательныя или равныя нулю.

Пусть имѣемъ произведеніе $abcd$, въ которомъ всѣ сомножители—числа обыкновенныя. Тогда, какъ мы знаемъ, сомножителей можно переставлять какъ угодно, не измѣняя произведенія, т.-е. можно написать:

$$abcd=acbd=adbc=cbad\ldots.$$

Положимъ теперь, что одинъ изъ сомножителей, напр. b, сдѣлался отрицательнымъ числомъ. Отъ этого написанное выше равенство не нарушится, потому что всѣ произведенія сдѣлаются отрицательными, а абсолютныя величины у нихъ будутъ равны. Если другой сомножитель, напр. c, сдѣлается отрицательнымъ, то равенство опять не нарушится, потому что отъ этого всѣ произведенія перемѣнятъ знакъ (т.-е. сдѣлаются теперь положительными), а абсолютныя величины у нихъ будутъ равны. Такъ же убѣдимся, что равенство не нарушится, если и другіе сомножители сдѣлаются отрицательными. Оно, очевидно, не нарушится и тогда, когда одинъ или нѣсколько сомножителей сдѣлаются равными 0.

ГЛАВА V.

Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

42. Опредѣленіе. *Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь буквы значитъ написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему*

Такъ, многочленъ $1+2x+3x^2-x^3-{}^1/_2x^4$ расположенъ *по возрастающимъ степенямъ* буквы x. Тотъ же многочленъ будетъ расположенъ *по убывающимъ степенямъ* буквы x, если члены его напишемъ въ обратномъ порядкѣ: $-{}^1/_2x^4-x^3+$ $+3x^2+2x+1$.

Буква, по которой расположенъ многочленъ, наз. *главною* его буквой. Когда члены многочлена содержатъ нѣсколько буквъ и ни одной изъ нихъ не приписывается какого-либо особеннаго значенія, то безразлично, какую изъ нихъ считать за главную.

Членъ, содержащій главную букву съ наибольшимъ показателемъ, наз. *высшимъ* членомъ многочлена; членъ, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ, или не содержащій ея вовсе, наз. *низшимъ* членомъ многочлена.

Чтобы расположить такой многочленъ, въ которомъ есть нѣсколько членовъ съ одинаковыми показателями главной буквы, надо заключить эти члены въ скобки и вынести за скобку общимъ множителемъ главную букву съ ея показателемъ. Напр.:

$$2ax^3-4a^2x^2-{}^1/_2ax^2-8a^3x+1$$
$$=2ax^3-(4a^2x^2+{}^1/_2ax^2)-8a^3x+1$$
$$=2ax^3-(4a^2+{}^1/_2a)x^2-8a^3x+1$$

Двучленъ $4a^2+{}^1/_2a$ должно въ этомъ случаѣ разсматривать, какъ коэффиціентъ при x^2.

43. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ всего удобнѣе производить такъ, какъ будетъ указано на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$(3x-5+7x^2-x^3)\ (2-8x^2+x)$$

$$\begin{array}{rl}
-x^3+7x^2+3x-5 & \\
-8x^2+x+2 & \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{произв. множимаго на} -8x^2 \\
-\ x^4+\ 7x^3+\ 3x^2-5x \ldots\ldots\ldots & \text{произв. множимаго на} +x \\
-\ 2x^3+14x^2+6x-10 \ldots & \text{произв. множимаго на} +2 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+\ x-10 \ldots & \text{полное произведеніе.}
\end{array}$$

Расположивъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, пишутъ множителя подъ множимымъ и подъ множителемъ проводятъ черту. Умножаютъ всѣ члены

множимаго на 1-й членъ множителя и полученное *частное произведенiе* пишутъ подъ чертою. Умножаютъ затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя и полученное второе частное произведенiе пишутъ подъ первымъ частнымъ произведенiемъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными. Такъ же поступаютъ при умноженiи всѣхъ членовъ множимаго на слѣдующiе члены множителя. Подъ послѣднимъ частнымъ произведенiемъ проводятъ черту; подъ этою чертою пишутъ *полное произведенiе*, складывая всѣ частныя произведенiя.

Можно также оба многочлена расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы:

$$\begin{array}{r}
-5+3x+7x^2-x^3 \\
2+x-8x^2 \\
\hline
-10+6x+14x^2-2x^3 \qquad\qquad\qquad \\
-5x+3x^2+7x^3-x^4 \qquad\qquad \\
+40x^2-24x^3-56x^4+8x^5 \\
\hline
-10+x+57x^2-19x^3-57x^4+8x^5
\end{array}$$

Удобство этихъ прiемовъ, очевидно, состоитъ въ томъ, что подобные члены располагаются другъ подъ другомъ и, слѣд., ихъ не нужно отыскивать.

Когда въ данныхъ многочленахъ не достаетъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ членовъ, то на мѣстахъ этихъ членовъ полезно оставлять пустыя пространства для болѣе удобнаго подписыванiя подобныхъ членовъ; напр.:

$$\begin{array}{llllll}
a^3 & \text{„} & +5a & -3\ldots\ldots & \text{(нѣтъ члена съ } a^2) & \\
 & a^2 & +2a & -1 & & \\
\hline
a^5 & & +5a^3 & -3a^2 & & \\
 & +2a^4 & & +10a^2 & -6a & \\
 & & -a^3 & & -5a & +3 \\
\hline
a^5 & +2a^4 & +4a^3 & +7a^2 & -11a & +3
\end{array}$$

44. Высшiй и низшiй члены произведенiя. Изъ разсмотрѣнiя примѣровъ умноженiя расположенныхъ многочленовъ слѣдуетъ:

Высшiй членъ произведенiя равенъ произведенiю высшаго члена множимаго на высшiй членъ множителя; низшiй членъ

произведенія равенъ произведенію низшаго члена множимаго на низшій членъ множителя.

Остальные члены произведенія могутъ получиться отъ соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Можетъ даже случиться, что въ произведеніи, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, всѣ члены сократятся, кромѣ высшаго и низшаго. Напр.:

$$\begin{array}{r} x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\ x-a \\ \hline x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\ -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\ \hline x^5 \quad " \quad " \quad " \quad " -a^5 \end{array}$$

45. Число членовъ произведенія. Пусть во множимомъ 5, а во множителѣ 3 члена. Умноживъ каждый членъ множимаго на 1-й членъ множителя, получимъ 5 членовъ произведенія; умноживъ каждый членъ множимаго на 2-й членъ множителя, получимъ еще 5 членовъ произведенія, и т. д.; значитъ всѣхъ членовъ произведенія будетъ 5.3, т.-е. 15. Такимъ образомъ, *число членовъ произведенія, до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.*

Такъ какъ высшій и низшій члены произведенія не могутъ имѣть подобныхъ членовъ, а всѣ прочіе могутъ сократиться, то *наименьшее число членовъ произведенія, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно 2.*

ГЛАВА VI.

Нѣкоторые случаи умноженія двучленовъ.

46. Полезно обратить особое вниманіе на слѣдующіе 5 случаевъ умноженія двучленовъ:

I. *Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ*; т.-е.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Дѣйствительно: $(a+b)(a-b)=a^2+\underline{ab}-\underline{ab}-b^2=a^2-b^2$.

II. *Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ квадрату пер-*

ваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа; т.-е.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+\underline{ab}+\underline{ab}+b^2$
$=a^2+2ab+b^2.$

III. *Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа;* т.-е.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-\underline{ab}-\underline{ab}+b^2$
$=a^2-2ab+b^2.$

IV. *Кубъ суммы двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго числа;* т.-е.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

V. *Кубъ разности двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, минусъ кубъ второго числа;* т.-е.

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

46,*a*. Обобщеніе этихъ формулъ. При помощи отрицательныхъ чиселъ каждая пара формулъ:

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}\text{ и }\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$$

можетъ быть приведена къ одной формулѣ. Въ самомъ дѣлѣ, разность $a-b$ мы можемъ разсматривать, какъ сумму $a+(-b)$. Если эту алгебраическую сумму возвысимъ въ квадратъ и въ

кубъ по правиламъ, относящимся до суммъ, и затѣмъ раскроемъ скобки по правиламъ дѣйствій надъ отрицательными числами, то получимъ формулы квадрата и куба разности:

$$[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2+(-2ab)+b^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2$$
$$[a+(-b)]^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$
$$=a^3+(-3a^2b)+3ab^2+(-b^3)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Условившись всякій двучленъ разсматривать, какъ *сумму*, мы можемъ правила, приведенныя выше, замѣнить такими:

Квадратъ двучлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена.

Кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго члена.

47. Примѣненіе этихъ формулъ. При помощи этихъ формулъ можно иногда производить умноженіе многочленовъ проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Примѣры: 1) $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3).\ 1+1^2=16a^6-8a^3+1$

2) $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$

3) $$\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)^2+$$
$$+2\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)+\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=$$
$$=\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2$$

4) $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y]\ [(x+1)-y]=$
$=(x+1)^2-y^2=x^2+2x+1-y^2$

5) $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)]\ [a+(b-c)]=$
$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=$
$=a^2-b^2+2bc-c^2.$

6) $(2a+1)^3=(2a)^3+3(2a)^2 1+3(2a)1^2+1^3=$
$=8a^3+12a^2+6a+1.$

7) $(1-3x^2)^3=1^3-3.\ 1^2.3x^2+3.\ 1.(3x^2)^2-(3x^2)^3=$
$=1-9x^2+27x^4-27x^6.$

ГЛАВА VII.

Алгебраическое дѣленіе

48. Предварительныя замѣчанія. 1) *Дѣлимое можетъ быть 0,* причемъ и частное должно быть 0. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на какое-нибудь число a значитъ найти такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведеніи 0. Такое число есть и только одно, именно 0; значитъ, $0 : a = 0$.

2) *Дѣлитель не можетъ бышь нулемъ,* если только дѣлимое не равно 0, потому что, какое бы число мы ни предположили въ частномъ, оно, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0, а не какое-либо другое число.

3) Всѣ правила дѣленія выводятся на основаніи того, что это дѣйствіе обратно умноженію.

49. Правило знаковъ при дѣленіи остается то же самое, что и при умноженіи, т.-е. при дѣленіи *одинаковые знаки даютъ* $+$, *разные* $-$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дѣлимое имѣетъ знакъ $+$; тогда дѣлитель и частное должны имѣть (какъ сомножители) *одинаковые* знаки; напр.:

$$(+10) : (+2) = +5, \text{ потому что } +10 = (+2)(+5);$$
$$(+10) : (-2) = -5, \text{ потому что } +10 = (-2)(-5).$$

Если же дѣлимое имѣетъ знакъ $-$, то дѣлитель и частное должны имѣть *разные* знаки, напр.;

$$(-8) : (+2) = -4, \text{ потому что } -8 = (+2)(-4);$$
$$(-8) : (-2) = +4, \text{ потому что } -8 = (-2)(+4).$$

50. Дѣленіе степеней одинаковыхъ буквъ. Пусть дано раздѣлить $a^8 : a^5$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, а при умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то $a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3$; дѣйствительно: $a^8 = a^5 . a^3$.

Правило. *При дѣленіи степеней одного и того же числа показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго.*

51. Нулевой показатель. Когда показатель дѣлителя равенъ показателю дѣлимаго, то частное равно 1; напр.: $a^5 : a^5 = 1$,

потому что $a^5=a^5.1$. Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда получимъ въ частномъ букву съ *нулевымъ* показателемъ: $a^5:a^5=a^{5-5}=a^0$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, какое мы придавали показателямъ раньше, такъ какъ повторить число множителемъ 0 разъ, очевидно, нельзя. Условившись подъ видомъ a^0 разумѣть *частное отъ дѣленія одинаковыхъ степеней числа* a, мы должны принять, что $a^0=1$. Въ этомъ смыслѣ обыкновенно и разсматриваютъ это выраженіе.

Букву съ нулевымъ показателемъ, какъ равную единицѣ, мы можемъ приписать ко всякому выраженію въ видѣ *множителя* или *дѣлителя*; напр., располагая многочленъ $3x-4x^2+7+2x^3$ по степенямъ буквы x, мы можемъ членъ $+7$ разсматривать, какъ $+7x^0$ и писать: $2x^3-4x^2+3x+7x^0$.

51,a. Отрицательный показатель *). Если показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго, то частное не можетъ быть выражено цѣлымъ одночленомъ; такъ, частное $a^2:a^5$ не равно никакому цѣлому количеству, потому что цѣлое количество, умноженное на a^5, не можетъ составить a^2. Если условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ, то получимъ въ частномъ букву съ *отрицательнымъ* показателемъ; напр.: $a^2:a^5=a^{-3}$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, которое придается положительнымъ показателямъ, такъ какъ, очевидно, нельзя повторить число сомножителемъ -2 раза, -3 раза и т. д. *Число съ отрицательнымъ показателемъ условно употребляютъ для обозначенія частнаго отъ дѣленія степеней этого числа въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя превосходитъ показателя дѣлимаго на столько единицъ, сколько ихъ находится въ абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.* Такъ, a^{-n} означаетъ частное $a^m:a^{m+n}$.

52. Дѣленіе цѣлыхъ одночленовъ. Пусть дано раздѣлить $12a^7b^5c^2d^3$ на $4a^4b^3d^3$. Предположимъ, что частное выразится цѣлымъ одночленомъ. По опредѣленію дѣленія этотъ одно-

---

*) Этотъ §, при желаніи преподающаго, можетъ быть проходимъ ниже, совмѣстно съ § 71.

членъ, умноженный на дѣлителя, долженъ составить дѣлимое. Но при умноженіи одночленовъ коэффиціенты ихъ перемножаются, а показатели одинаковыхъ буквъ складываются. Отсюда слѣдуетъ, что у искомаго частнаго коэффиціентъ долженъ быть 12 : 4, т.-е. 3, а показатели у буквъ a и b получатся вычитаніемъ изъ показателей дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя. Буква c должна перейти въ частное съ своимъ показателемъ, а буква d совсѣмъ не должна войти въ частное, или войдетъ въ него съ показателемъ 0. Такимъ образомъ:

$$12a^7b^5c^2d^3:4a^4b^3d^3=3a^3b^2c^2d^0=3a^3b^2c^2.$$

Что найденное частное вѣрно, можно убѣдиться повѣркой: умноживъ $3a^3b^2c^2$ на $4a^4b^3d^3$, получимъ дѣлимое.

Правило. *Чтобы раздѣлить цѣлый одночленъ на цѣлый одночленъ, достаточно коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычесть показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и перенести въ частное, безъ измѣненія показателей, тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ.*

Примѣры: 1) $3m^3n^4x:4m^2nx={}^3/_4mn^3x^0={}^3/_4mn^3$

2) $ax^ny^m:{}^3/_4axy^2={}^4/_3a^0x^{n-1}y^{m-2}={}^4/_3x^{n-1}y^{m-2}$

3) $0{,}6a^3(x+y)^4:2{,}5a(x+y)^2=0{,}24a^2(x+y)^2$

53. Невозможное дѣленіе. Когда частное отъ дѣленія цѣлыхъ одночленовъ не можетъ быть выражено цѣлымъ одночленомъ, то говорятъ, что дѣленіе *невозможно*. Это бываетъ въ двухъ случаяхъ:

1) когда въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ;

2) когда показатель какой-нибудь буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ.

Пусть, напр., дано раздѣлить $4a^2b$ на $2ac$. Всякій цѣлый одночленъ, умноженный на $2ac$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву c; такъ какъ въ нашемъ дѣлимомъ нѣтъ этой буквы, то, значитъ, частное не можетъ быть выражено цѣлымъ одночленомъ.

Также невозможно дѣленіе $10a^3b^2 : 5ab^3$, потому что всякій цѣлый одночленъ, умноженный на $5ab^3$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву b съ показателемъ 3 или большимъ, тогда какъ въ нашемъ дѣлимомъ эта буква стоитъ съ показателемъ 2.

54. Дѣленіе многочлена на одночленъ. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m. Искомое частное выразится такъ:

$$(a+b-c):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя m. Если въ произведеніи получимъ дѣлимое, то частное вѣрно. Примѣняя правило умноженія многочлена на одночленъ, получимъ:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}.\ m+\frac{b}{m}.\ m-\frac{c}{m}.\ m=a+b-c$$

Значитъ, предполагаемое частное вѣрно.

Правило. *Чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, достаточно раздѣлить на этотъ одночленъ каждый членъ дѣлимаго.*

Примѣры: 1) $(20a^3x^2-8a^2x^3-ax^4+3a^3x^3) : 4ax^2=$

$$=5a^2-2ax-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}a^2x$$

2) $(14m^p-21m^{p-1}) : 7m^2=2m^{p-2}-3m^{p-3}$

3) $\left(\frac{1}{2}x^3y^3-0,3x^2y^4+1\right) : 2x^2y^2=$

$$=\frac{1}{4}xy-0,15y^2+\frac{1}{2x^2y^2}$$

55. Дѣленіе одночлена на многочленъ. Частное отъ дѣленія одночлена на многочленъ не можетъ быть выражено ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ. Дѣйствительно, если предположимъ, что частное $a : (b+c-d)$ равно какому-нибудь цѣлому одночлену или цѣлому многочлену, то произведеніе этого частнаго на многочленъ $b+c-d$ дало

бы тоже многочленъ, а не одночленъ a, какъ требуется дѣленіемъ.

56. Дѣленіе многочлена на многочленъ. Частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ можетъ быть выражено въ видѣ многочлена лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ этомъ мы убѣдимся, когда разсмотримъ на примѣрѣ, какъ можно находить это частное.

Примѣръ 1. Пусть требуется раздѣлить:

$$(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)$$

Напишемъ оба многочлена **по убывающимъ степенямъ** буквы x и расположимъ дѣйствіе такъ, какъ оно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ:

$$\begin{array}{lrl}
 & \mathbf{6x^4}-19x^3+5x^2+17x-4 & \mid \mathbf{3x^2}-5x+1 \\
 & \underline{\pm 6x^4 \mp 10x^3 \pm 2x^2} & \overline{2x^2-3x-4} \\
\text{1-й остатокъ} & ,,\ -\mathbf{9x^3}+3x^2+17x-4 & \\
 & \underline{\mp 9x^3 \pm 15x^2 \mp 3x} & \\
\text{2-й остатокъ} & ,,\ -\mathbf{12x^2}+20x-4 & \\
 & \underline{\mp 12x^2 \pm 20x \mp 4} & \\
\text{3-й остатокъ} \ldots & 0 &
\end{array}$$

Предположимъ, что искомое частное есть многочленъ и что члены его расположены тоже по убывающимъ степенямъ буквы x. Чтобы найти этотъ многочленъ, разсуждаемъ такъ.

Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное. Изъ умноженія расположенныхъ многочленовъ извѣстно (§ 44), что *высшій* членъ произведенія равенъ произведенію *высшаго* члена множимаго на *высшій* членъ множителя. Въ дѣлимомъ высшій членъ есть первый, въ дѣлителѣ и частномъ высшіе члены тоже первые. Значитъ: 1-й членъ дѣлимаго ($6x^4$) долженъ быть произведеніемъ 1-го члена дѣлителя ($3x^2$) на 1-й членъ частнаго. Отсюда слѣдуетъ: *чтобы найти 1-й членъ частнаго, достаточно раздѣлить 1-й членъ дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя.* Раздѣливъ, находимъ 1-й членъ частнаго $2x^2$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ всѣ члены дѣлителя на 1-й членъ частнаго и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго. Для этого

напишемъ его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и у всѣхъ членовъ вычитаемаго перемѣнимъ знаки на обратные. Получимъ послѣ вычитанія 1-й остатокъ.

Дѣлимое есть произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на каждый членъ частнаго. Мы вычли изъ дѣлимаго произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 1-й членъ частнаго; слѣд., въ 1-мъ остаткѣ заключается произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 2-й, 3-й и т. д. члены частнаго. Высшій членъ въ остаткѣ есть 1-й; высшій членъ дѣлителя тоже 1-й; высшій членъ въ частномъ (не считая 1-го) есть 2-й членъ. Значитъ, 1-й членъ остатка ($-9x^3$) долженъ быть произведеніемъ 1-го члена дѣлителя на 2-й членъ частнаго. Отсюда заключаемъ: *чтобы найти 2-й членъ частнаго, достаточно раздѣлить 1-й членъ 1-го остатка на 1-й членъ дѣлителя.* Раздѣливъ, находимъ второй членъ частнаго $-3x$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ на 2-й членъ частнаго всѣ члены дѣлителя и полученное произведеніе вычтемъ изъ 1-го остатка. Получимъ 2-й остатокъ.

Второй остатокъ есть произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 3-й, 4-й и т. д. члены частнаго. Такъ какъ изъ этихъ членовъ частнаго высшій есть 3-й, то, подобно предыдущему, *3-й членъ частнаго найдемъ, если 1-й членъ 2-го остатка раздѣлимъ на 1-й членъ дѣлителя.* Раздѣливъ, находимъ -4. Умноживъ на -4 всѣ члены дѣлителя и вычтя произведеніе изъ остатка, получаемъ 3-й остатокъ. Въ нашемъ примѣрѣ этотъ остатокъ оказался нулемъ; это показываетъ, что въ частномъ другихъ членовъ, кромѣ найденныхъ, не можетъ быть. Если бы 3-й остатокъ былъ не 0, то, подобно предыдущему, надо было бы дѣлить 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя; отъ этого получился бы 4-й членъ частнаго и т. д.

Подобнымъ же образомъ можно выполнить дѣленіе, расположивъ оба многочлена **по возрастающимъ степенямъ** главной буквы:

$$\begin{array}{l|l}
-\mathbf{4}+17x+5x^2-19x^3+6x^4 & \mathbf{1}-5x+3x^2 \\ \cline{2-2}
\mp 4 \pm 20x \mp 12x^2 & -4-3x+2x^2 \\ \cline{1-1}
\text{„}\quad -\mathbf{3x}+17x^2-19x^3+6x^4 & \\
\mp 3x \pm 15x^2 \mp 9x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad \mathbf{2x}^2-10x^3+6x^4 & \\
\pm 2x^2 \mp 10x^3 \pm 6x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

При такомъ расположенiи первые члены въ дѣлимомъ, дѣлителѣ, частномъ и остаткахъ будутъ *низшiе*. Такъ какъ низшiй членъ произведенiя (дѣлимаго) долженъ равняться произведенiю низшаго члена множимаго (дѣлителя) на низшiй членъ множителя (частнаго), то ходъ разсужденiй и порядокъ дѣйствiя остаются тѣ же самые, какъ и въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

Вотъ еще нѣкоторые примѣры дѣленiя многочленовъ:

Примѣръ 2.

$$\begin{array}{l|l}
28x^4-13cx^3-26c^2x^2+15c^3x & 7x^2+2cx-5c^2 \\ \cline{2-2}
\text{„}\quad \pm 8cx^3 \mp 20c^2x^2 & 4x^2-3cx \\ \cline{1-1}
\quad -21cx^3-6c^2x^2+15c^3x & \\
\text{„}\qquad \mp 6c^2x^2 \pm 15c^3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Нѣтъ надобности писать произведенiя 1-го члена дѣлителя на 1-й, 2-й и т. д. члены частнаго, потому что эти произведенiя всегда равны тѣмъ членамъ, подъ которыми они подписываются, и при вычитанiи всегда сокращаются.

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{l|l}
-\frac{5}{2}+\frac{47}{12}x-3x^2+x^3 & -3+2x \\ \cline{2-2}
\text{„}\quad -\frac{5}{3}x & \frac{5}{6}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x^2 \\ \cline{1-1}
\quad \frac{27}{12}x-3x^2\ldots & \\
\qquad +\frac{3}{2}x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -\frac{3}{2}x^2+x^3 & \\
\qquad \text{„}\quad -x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Подписывая вычитаемыя, можемъ писать ихъ прямо съ обратными знаками. Къ остатку нѣтъ надобности сносить всѣ члены дѣлимаго.

Примѣръ 4. $x^5-a^5 \mid x-a$

Частное: $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$

$$
\begin{array}{l}
x^5-a^5 \\
\text{„}\ +ax^4 \\
\hline
ax^4-a^5 \\
\text{„}\ +a^2x^3 \\
\hline
a^2x^3-a^5 \\
\text{„}\ +a^3x^2 \\
\hline
a^3x^2-a^5 \\
\text{„}\ +a^4x \\
\hline
a^4x-a^5 \\
\text{„}\ +a^5 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Подобнымъ образомъ можемъ убѣдиться, что разности: x^3-a^3, x^4-a^4, $x^6-a^6\ldots$ и вообще x^m-a^m дѣлятся безъ остатка на разность $x-a$, т.-е. *разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность тѣхъ же количествъ.*

Примѣръ 5. $(-23a^3b^2+12a+20a^4b^3+12a^2b^2-10a^2b-9ab)$: $(4ab-3)$

По какой бы буквѣ мы ни располагали, въ дѣлимомъ встрѣчаются члены съ одинаковыми показателями главной буквы. Такіе члены соединяютъ въ одинъ, вынося главную букву за скобку. Расположимъ по буквѣ a:

$20b^3a^4-23b^2a^3+(12b^2-10b)a^2+(12-9b)a \mid 4ba-3$

Частное: $5b^2a^3-2ba^2+(3b-4)a$

$$
\begin{array}{l}
20b^3a^4-23b^2a^3+(12b^2-10b)a^2+(12-9b)a \\
\text{„}\quad +15b^2a^3 \\
\hline
-8b^2a^3+(12b^2-10b)a^2 \\
\text{„}\quad -\ 6ba^2 \\
\hline
(12b^2-16b)a^2+(12-9b)a \\
\qquad\qquad +(9b-12)a \\
\hline
0
\end{array}
$$

Примѣръ 6. $x^3+Ax^2+Bx+C \mid x-a$

Частное: $x^2+(a+A)x+(a^2+Aa+B)$

$$
\begin{array}{l}
x^3+Ax^2+Bx+C \\
\text{„}+ax^2 \\
\hline
(a+A)x^2+Bx \\
\text{„}\quad +(a^2+Aa)x \\
\hline
(a^2+Aa+B)x+C \\
\text{„}\quad +(a^3+Aa^2+Ba) \\
\hline
a^3+Aa^2+Ba+C
\end{array}
$$

57. Признаки невозможности дѣленія многочлена на многочленъ. Эти признаки слѣдующіе:

1) *Если показатель главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно*, потому что тогда нельзя получить низшаго члена частнаго въ цѣломъ видѣ.

2) *Если показатель главной буквы въ низшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно*, потому что тогда нельзя получить низшаго члена частнаго въ цѣломъ видѣ.

3) Если показатели главной буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлимаго не меньше соотвѣтственно показателей этой буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлителя, то еще нельзя сказать, чтобы дѣленіе было возможно. Въ этомъ случаѣ, чтобы судить о возможности дѣленія, надо приступить къ выполненію самаго дѣйствія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока окончательно не убѣдимся въ возможности или невозможности получить цѣлое частное. При этомъ надо различить два случая:

I. Когда многочлены расположены по *убывающимъ* степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0 (тогда дѣленіе возможно), или пока не дойдутъ до такого остатка, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ первый членъ дѣлителя (тогда дѣленіе невозможно).

II. Когда многочлены расположены по *возрастающимъ* степенямъ главной буквы, то сколько бы ни продолжать дѣленія, нельзя получить такого остатка, у котораго первый членъ содержалъ бы главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ у перваго члена дѣлителя, потому что при такомъ расположеніи показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, увеличиваясь (см. ниже примѣръ 4-й). Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: предположивъ, что цѣлое частное возможно, вычисляютъ заранѣе *послѣдній* членъ его, дѣля *высшій* членъ дѣлимаго (т.-е послѣдній) на *высшій* членъ дѣлителя (на послѣдній). Найдя высшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ

не получится члена, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго члена. Если при этомъ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно, потому что цѣлое частное не должно содержать членовъ выше того, который получается отъ дѣленія высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя.

Примѣръ 1. $(3x^2+5x-8):(2x^3-4)$

Дѣленіе невозможно, потому что $3x^2$ не дѣлится на $2x^3$.

Примѣръ 2. $(b^4+5b^3-3b^2+2b):(b^3-2b^2)$.

Дѣленіе невозможно, потому что $2b$ не дѣлится на $2b^2$.

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{r|l}
10a^4-2a^3 \;\text{„}\; +3a+4 & 2a^2-1 \\ \cline{2-2}
\text{„}\;\; +5a^2 \qquad\qquad & 5a^2-a+\frac{5}{2} \\ \cline{1-1}
-2a^3+5a^2+3a\ldots & \\
\text{„}\;\; -a \qquad & \\ \cline{1-1}
5a^2+2a+4 & \\
\text{„}\;\; +\frac{5}{2} & \\ \cline{1-1}
2a+6\frac{1}{2} &
\end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у котораго первый членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя.

Примѣръ 4.

$$\begin{array}{r|l}
4+3a \;\text{„}\; -2a^3+10a^4 & -1+2a^2 \\ \cline{2-2}
\text{„}\;\; +8a^2 \qquad\qquad & -4-3a-8a^2 \\ \cline{1-1}
3a+8a^2-2a^3 \qquad & \\
+6a^3 \qquad & \\ \cline{1-1}
8a^2+4a^3+10a^4 & \\
\text{„}\;\; +16a^4 & \\ \cline{1-1}
4a^3+26a^4 &
\end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что, продолжая дѣйствіе, мы получили бы въ частномъ членъ $-4a^3$, тогда какъ послѣдній членъ цѣлаго частнаго, если бы оно могло существовать, долженъ быть $5a^2$.

57,*a*. **Повѣрка дѣленія.** Пусть дѣлимое будетъ какой-нибудь многочленъ N, дѣлитель P, частное Q и остатокъ R. Между этими количествами существуетъ такая же зависимость,

какъ и при ариѳметическомъ дѣленіи, т.-е. *дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ*. Дѣйствительно, остатокъ R получился отъ вычитанія изъ многочлена N всѣхъ членовъ произведенія PQ. Значитъ: $N-PQ=R$; откуда: $N=PQ+R$. Поэтому, чтобы повѣрить дѣленіе, умножаютъ частное на дѣлителя и прибавляютъ къ произведенію остатокъ, если онъ есть; при правильномъ выполненіи дѣйствія въ результатѣ должно получиться дѣлимое.

Примѣръ. Повѣримъ правильность дѣленія въ примѣрѣ 4-мъ предыдущаго параграфа:

$$\begin{array}{l} -4-3a-8a^2 \\ \quad -1+2a^2 \\ \hline +4+3a+8a^2 \\ \qquad\qquad -8a^2-6a^3-16a^4 \\ \hline \quad 4+3a \qquad\quad -6a^3-16a^4 \\ \qquad\qquad\qquad +4a^3+26a^4 \\ \hline \quad 4+3a \qquad\quad -2a^3+10a^4 \end{array}$$

ГЛАВА VIII.

Нѣкоторые случаи дѣленія многочленовъ.

58. Теорема. *Многочленъ, цѣлый относительно* **x** *и расположенный по убывающимъ степенямъ этой буквы:*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+K$$

при дѣленіи на x—a, *гдѣ* a *есть какое угодно положительное или отрицательное число, даетъ въ остаткѣ такой многочленъ:*

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+K,$$

который получится изъ дѣлимаго, если въ немъ x *замѣнимъ на* a.

Назовемъ для краткости дѣлимое буквою P. Дѣленіе P на $x-a$ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ, не содержащій буквы x (потому что дѣлитель содержитъ x лишь въ первой степени). Назовемъ этотъ остатокъ R, а цѣлое частное, получившееся при этомъ, Q. Тогда:

$$P=(x-a)\ Q+R$$

Это равенство есть *тождество*, такъ какъ правая его часть, послѣ совершенія въ ней дѣйствій умноженія, сложенія и приведенія подобныхъ членовъ, дастъ тотъ же самый многочленъ, какой стоитъ въ лѣвой части равенства. Если же это равенство есть тождество, то оно вѣрно при все-

возможныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него. Поэтому оно остается вѣрнымъ, если положимъ въ немъ $x=a$. Отъ такой замѣны остатокъ R не измѣнится, такъ какъ онъ не содержитъ x; дѣлимое же и частное превратятся въ многочлены P_1 и Q_1, которые получатся изъ P и Q, если въ нихъ x замѣнимъ на a. Слѣд.:

$$P_1=(a-a)\ Q_1+R$$

Но $(a-a)\ Q=0$; поэтому $P_1=R$, т.-е.

$$R=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+K$$

Замѣчаніе. Коэффиціенты $A, B, C....K$ могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю *).

Примѣры: 1) x^3+Ax^2+Bx+C при дѣленіи на $x-a$ даетъ остатокъ: a^3+Aa^2+Ba+C (см. примѣръ 6-й на стр. 42).

2) x^3-Bx^2+C при дѣленіи на $x+m$, т.-е. на $x-(-m)$, даетъ остатокъ: $(-m)^3-B(-m)^2+C=-m^3-Bm^2+C$. Предлагаемъ учащимся убѣдиться въ этомъ непосредственно дѣленіемъ.

3) x^5-3x^2+5x-1 при дѣленіи на $x-2$ даетъ остатокъ: $2^5-3.2^2+5.2-1=29$.

4) Тотъ же многочленъ при дѣленіи на $x+2$, т.-е. на $x-(-2)$, даетъ остатокъ: $(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)-1=-55$.

Слѣдствіе. *Если многочленъ* $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+K$ *обращается въ нуль при* $x=a$, *то онъ дѣлится на* $x-a$. *Если же этотъ многочленъ обращается въ нуль при* $x=-a$, *то онъ дѣлится на* $x-(-a)=x+a$.

Примѣры: 1) x^3-4x^2+9 дѣлится на $x-3$, потому что остатокъ отъ дѣленія$=3^3-4.3^2+9=0$.

2) $2x^2+x-45$ дѣлится на $x+5$, потому что остатокъ $=2\ (-5)^2+(-5)-45=0$.

59. Слѣдуетъ обратить особенное вниманіе на слѣдующіе **случаи дѣлимости двучленовъ**:

---

*) Въ вѣрности доказываемой теоремы мы можемъ убѣдиться также, наблюдая процессъ дѣленія даннаго многочлена $x-a$:

$$\begin{array}{l|l} Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+K & x-a \\ \quad ,,\ +Aax^{m-1} & Ax^{m-1}+(Aa+B)x^{m-2}+\ldots \end{array}$$

1-й остатокъ....... $(Aa+B)x^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots$

$\qquad\qquad ,,\quad +(Aa^2+Ba)x^{m-2}$

2-й остатокъ ...... $+(Aa^2+Ba+C)x^{m-2}+Dx^{m-3}+\ldots$

Всматриваясь въ остатки, легко замѣтимъ законъ ихъ составленія; по этому закону можемъ написать:

3-й остатокъ ..$=(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{m-3}+\ldots..+K$

. . . .

m-й, послѣдній остатокъ.... $=(Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K)x^{m-m}$

$=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots.+K$

1) *Разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на разность тѣхъ же количествъ*, такъ какъ x^m-a^m при дѣленіи на $x-a$ даетъ остатокъ $a^m-a^m=0$.

2) *Сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на разность тѣхъ же количествъ*, такъ какъ x^m+a^m при $x=a$ даетъ остатокъ $a^m+a^m=2a^m$, что при $a\neq 0$ не равно 0.

3) *Разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится, а нечетныхъ не дѣлится на сумму этихъ количествъ*, такъ какъ x^m-a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m-a^m$, что при m четномъ равно нулю, а при m нечетномъ равно $-2a^m$.

4) *Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится, а четныхъ не дѣлится на сумму этихъ количествъ*, такъ какъ x^m+a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m+a^m$, что при m нечетномъ равно нулю, а при m четномъ равно $2a^m$.

Замѣчаніе. Полезно имѣть въ виду слѣдующее простое соображеніе, посредствомъ котораго легко возстановить въ памяти указанные четыре случая дѣлимости. Пусть, напр., мы желаемъ вспомнить, когда x^m+a^m дѣлится на $x+a$. Для этого разсуждаемъ такъ: x^1+a^1 дѣлится на $x+a$, а x^2+a^2 не дѣлится на $x+a$; значитъ, сумма нечетныхъ степеней дѣлится, а сумма четныхъ не дѣлится на $x+a$. Подобнымъ же образомъ легко можемъ воспомнить дѣлимость или недѣлимость и въ остальныхъ изъ указанныхъ случаевъ.

60. Полезно замѣтить **частныя**, которыя получаются въ этихъ случаяхъ:

	x^m-a^m	$x-a$
	$\text{„}+ax^{m-1}$	$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}$
1-й ост. . .	$ax^{m-1}-a^m$	
	$\text{„}+a^2x^{m-2}$	
2-й ост. . .	$a^2x^{m-2}-a^m$	
	$\text{„}+a^3x^{m-3}$	
3-й ост. . .	$a^3x^{m-3}-a^m$	
		
m—1 ост. . .	$a^{m-1}x-a^m$	
m-й ост. . .	$a^m-a^m=0$	

Многочленъ, получившійся въ частномъ, содержитъ m членовъ; сумма показателей въ каждомъ членѣ при a и x есть величина постоянная, равная $m-1$; показатели x идутъ, уменьшаясь на 1 отъ $m-1$ до 0, показатели a идутъ, увеличиваясь на 1 отъ 0 до $m-1$; коэффиціенты у всѣхъ членовъ равны 1; знаки всѣ $+$.

Чтобы получить частное отъ дѣленія x^m-a^m на $x+a$, при m четномъ, достаточно въ полученномъ выше частномъ замѣнить a на $-a$. То же самое можно сказать о частномъ $(x^m+a^m):(x+a)$ при m нечетномъ. Такимъ образомъ:

$$1)\quad x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1})$$

$$2)\quad x^m-a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots-a^{m-1})$$

(при m четномъ)

$$3)\quad x^m+a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-1})$$

(при m нечетномъ)

Разложенiе многочленовъ на множителей.

61. Укажемъ нѣкоторые простѣйшiе случаи, когда многочленъ можетъ быть разложенъ на цѣлыхъ множителей:

I. *Если всѣ члены многочлена содержатъ общаго множителя, то его можно вынести за скобку*; такъ:

$$am+bm+cm=(a+b+c)m$$

Примѣры: 1) $16a^2b^3x-4a^3b^2x^2=4a^2b^2x(4b-ax)$
2) $x^{n+1}-2x^n+3x^{n-1}=x^{n-1}(x^2-2x+3)$
3) $4m(a-1)-3n(a-1)=(a-1)(4m-3n)$

II. *Если данный трехчленъ представляетъ сумму квадратовъ двухъ количествъ, увеличенную или уменьшенную удвоеннымъ произведенiемъ этихъ количествъ, то его можно замѣнить квадратомъ суммы или разности этихъ количествъ*; такъ: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

Примѣры: 1) $a^2+2a+1=a^2+2a.1+1^2=(a+1)^2$
2) $x^4+4-4x^2=(x^2)^2+2^2-2(2x^2)=(x^2-2)^2$
3) $-x+25x^2+0{,}01=(5x)^2+(0{,}1)^2-2(5x.0{,}1)=$ $=(5x-0{,}1)^2$
4) $(a+x)^2+2(a+x)+1=[(a+x)+1]^2=(a+x+1)^2$
5) $4x^n-x^{2n}-4=-(x^{2n}+4-4x^n)=-(x^n-2)^2$

III. *Если данный двухчленъ представляетъ собою квадратъ одного количества безъ квадрата другого количества, то его можно замѣнить произведенiемъ суммы этихъ количествъ на ихъ разность*; такъ: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Примѣры: 1) $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)$ $=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$
2) $25x^2-4=(5x)^2-2^2=(5x+2)(5x-2)$
3) $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$
4) $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)]\ [x-(x-1)]$ $=(x+x-1)(x-x+1)=2x-1$

IV. Иногда можно замѣтить, что данный *четырехчленъ* представляетъ собою *кубъ суммы или разности двухъ количествъ*.

Примѣры: 1) $a^3+3a^2+3a+1=a^3+3a^2.1+3a.1^2+1^3=$
$=(a+1)^3$
2) $8x^3-36x^2+54x-27=(2x)^3-3(2x)^2.3+$
$+3(2x).3^2-3^3=(2x-3)^3$

V. Иногда многочленъ, состоящій изъ 4-хъ или болѣе членовъ, можно привести къ виду a^2-b^2 или $a^2\pm2ab+b^2$, разбивъ его предварительно на части.

Примѣры: 1) $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=$
$=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p)$
2) $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=$
$=[x+(y-3)]\ [x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$
3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a^2+b^2+2ab)+c^2+$
$+(2ac+2bc)=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c=(a+b+c)^2$

VI. Иногда многочленъ можно разбить *на части*, изъ которыхъ каждая разлагается на множителей; если въ числѣ этихъ множителей окажутся общіе, то ихъ можно вынести за скобки.

Примѣры: 1) $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=$
$=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$
2) $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
$=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=$
$=(3-x)(2+x)(2-x)$

VII. Иногда бываетъ полезно ввести *вспомогательные* члены, или какой-нибудь членъ *разложить* на два члена.

Примѣры: 1) $a^3-1=a^3-1+a^2-a^2=a^3-a^2+a^2-1=$
$=a^2(a-1)+(a^2-1)=a^2(a-1)+(a+1)(a-1)=$
$=(a-1)(a^2+a+1)$;
2) $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=2x(x+y)+$
$+y(x+y)=(x+y)(2x+y)$.

VIII. Полезно еще замѣтить слѣдующія *разложенія разности или суммы двухъ кубовъ и разности или суммы пятыхъ степеней двухъ чиселъ:*

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

Въ вѣрности этихъ формулъ можно убѣдиться непосредственно умноженіемъ или дѣленіемъ.

ГЛАВА X.

Алгебраическія дроби.

62. Опредѣленіе. Алгебраическою дробью называется частное отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій въ томъ случаѣ, когда дѣленіе только указано. Такъ: $\frac{a}{b}$, $\frac{a+b}{c-d}$ и тому подобныя выраженія суть алгебраическія дроби. Въ такихъ выраженіяхъ дѣлимое наз. *числителемъ*, дѣлитель—*знаменателемъ*, а то и другое—*членами дроби*.

Алгебраическая дробь отличается отъ ариѳметической тѣмъ, что члены ариѳметической дроби всегда числа цѣлыя положительныя, тогда какъ члены алгебраической могутъ быть числами какими угодно. Напр., $^3/_4$ есть ариѳметическая дробь, а выраженіе $\frac{^2/_5}{-3}$ представляетъ собою частный случай алгебраической дроби.

Однако, несмотря на это различіе, съ дробями алгебраическими можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія указаны въ ариѳметикѣ для дробей ариѳметическихъ. Докажемъ это.

63. Основное свойство дроби. *Значеніе дроби не измѣнится, если оба ея члена умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число.*

Пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$ и какое-нибудь положительное или отрицательное число m. Требуется доказать, что $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

Для доказательства умножимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства на bm и сравнимъ полученные результаты. Чтобы умножить на произведеніе bm, достаточно умножить на b и результатъ на m; отъ умноженія дроби $^a/_b$ на b получимъ a; отъ умноженія на m получимъ am. Правая часть доказываемаго равенства отъ умноженія на bm даетъ также am (такъ какъ дѣленіе на bm и умноженіе на bm взаимно уничтожаются). Если же дроби $^a/_b$ и $^{am}/_{bm}$ отъ умноженія на одно и то же число даютъ равныя числа, то эти дроби равны *).

Переходя въ доказанномъ равенствѣ отъ правой части къ лѣвой, заключаемъ, что значеніе дроби не измѣняется *отъ дѣленія* ея членовъ на одно и то же число.

64. Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду. Умножая оба члена дроби на подходящее количество, всегда можемъ преобразовать данную дробь такъ, что числитель и знаменатель ея будутъ количествами *цѣлыми*.

Примѣры.

$$1)\ \frac{\frac{3}{4}a}{b}=\frac{3a}{4b} \text{ (оба члена умножены на 4)}$$

---

*) Укажемъ еще слѣдующее доказательство, которое нѣкоторые предпочитаютъ. Пусть частное отъ дѣленія a на b есть q, а частное отъ дѣленія am на bm есть q', т.-е. положимъ, что

$$\frac{a}{b}=q \quad [1] \qquad \frac{am}{bm}=q' \quad [2]$$

Докажемъ, что $q=q'$. По опредѣленію дѣленія изъ равенствъ [1] и [2] выводимъ:

$$a=bq \quad [3] \qquad am=bmq' \quad [4]$$

Умноживъ обѣ части равенства [3] на m, получимъ:

$$am=bqm \quad [5]$$

Изъ сравненія [4] и [5] выводимъ:

$$bmq'=bqm$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на b и m, находимъ:

$$q'=q \text{ т.-е. } \frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$$

2) $\dfrac{7a}{2\frac{3}{5}b}=\dfrac{35a}{13b}$ (на 5)

3) $\dfrac{\frac{2}{3}a}{\frac{7}{8}b}=\dfrac{\frac{16}{24}a}{\frac{21}{24}b}=\dfrac{16a}{21b}$ (на 24)

4) $\dfrac{2a+\frac{5}{6}}{1-a}=\dfrac{12a+5}{6-6a}$ (на 6)

5) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{ax^2-x}{x-1}$ (на x)

65. Перемѣна знаковъ у членовъ дроби. Перемѣнить знаки на обратные передъ числителемъ и знаменателемъ дроби— это все равно, что перемѣнить знаки у дѣлимаго и у дѣлителя (другими словами: умножить дѣлимое и дѣлителя на -1); отъ этого значеніе частнаго не измѣняется.

Примѣры. 1) $\dfrac{-8}{-4}=\dfrac{8}{4}=2$ 2) $\dfrac{-10}{2}=\dfrac{10}{-2}=-5.$

3) $\dfrac{10-2}{7-3}=\dfrac{-(10-2)}{-(7-3)}=\dfrac{2-10}{3-7}=\dfrac{-8}{-4}=2$

4) $\dfrac{-3x}{a-b}=\dfrac{3a}{b-a}$ 5) $\dfrac{1-a}{2-b}=\dfrac{a-1}{b-2}.$

Замѣтимъ, что перемѣна знака передъ какимъ-нибудь однимъ членомъ дроби равносильна перемѣнѣ знака передъ самою дробью; такъ:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

потому что при дѣленіи *минусъ* на *плюсъ* и *плюсъ* на *минусъ* даютъ *минусъ*.

Примѣръ: $\dfrac{m^2-n^2}{n-m}=\dfrac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\dfrac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n)$

66. Сокращеніе дроби. Если числитель и знаменатель имѣютъ общаго множителя, то на него можно *сократить* дробь (потому что значеніе дроби не измѣнится отъ дѣленія обоихъ ея членовъ на одно и то же количество). Разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе два случая сокращенія дробей.

1-й случай, когда числитель и знаменатель одночлены.

Примѣры: 1) $\frac{12a^2x^3}{15ax^2y}=\frac{4ax}{5y}$ (сокращено на $3ax^2$)

2) $\frac{54a^nb^{n-3}}{72ab^{n-1}}=\frac{3a^{n-1}}{4b^2}$ (сокращено на $18ab^{n-3}$)

Изъ этихъ примѣровъ видно, что когда числитель и знаменатель *цѣлые одночлены съ цѣлыми коэффиціентами,* то, желая сократить дробь, мы предварительно составляемъ такое выраженіе, которое можетъ быть названо (по аналогіи съ цѣлыми числами) *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* членовъ дроби. Для этого *надо найти общаго наиб. дѣлителя коэффиціентовъ и приписать къ нему множителями всѣ буквы, которыя входятъ одновременно въ числителя и знаменателя дроби, причемъ каждую изъ этихъ буквъ надо взять съ наименьшимъ показателемъ, съ какимъ она входитъ въ члены дроби;* составивъ такое произведеніе и раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ дробь несократимую.

2-й случай, когда числитель или знаменатель многочлены.

Примѣры:

1) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-1)}=$

$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$

2) $\frac{n-m}{m^2-n^2}=\frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{-1}{m+n}=-\frac{1}{m+n}$

Такимъ образомъ, *чтобы сократить дробь съ многочленнымъ числителемъ или знаменателемъ, надо предварительно разложить ихъ на множителей и затѣмъ сократить на общихъ множителей*).*

*) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при сокращеніи дробей: *нельзя сокращать часть числителя съ частью знаменателя.* Напр., было бы вообще ошибочно сократить дробь $\frac{am+b}{cm+d}$ такъ: $\frac{a+b}{c+d}$

67. Приведеніе дробей къ общему знаменателю. Умножая оба члена каждой дроби на одно и то же количество, мы можемъ сдѣлать знаменателей всѣхъ данныхъ дробей одинаковыми. При этомъ могутъ представиться тѣ же случаи, какъ и для дробей ариѳметическихъ, а именно:

1-й случай, *когда знаменатели данныхъ дробей, попарно, не имѣютъ общихъ множителей.* Въ этомъ случаѣ оба члена каждой дроби надо умножить на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.

Примѣры: 1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \ldots\ldots \frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{dbf}, \frac{ebd}{fbd}$

2) $\frac{x}{m^2}, \frac{y}{n^2}, \frac{z}{pq} \ldots \frac{xn^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{ym^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{zm^2n^2}{m^2n^2pq}$

3) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b} \ldots \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$

2-й случай, *когда одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ.* Этотъ знаменатель и будетъ общимъ. Дробь, имѣющую этого знаменателя, надо оставить безъ перемѣны, а члены каждой изъ остальныхъ дробей надо умножить на соотвѣтствующаго *дополнительнаго множителя*, т.-е. на такое количество, которое получится отъ дѣленія общаго знаменателя на знаменателя этой дроби.

Примѣръ: $\frac{x}{a-b}, \frac{y}{a+b}, \frac{z}{a^2-b^2}$

Знаменатель a^2-b^2 дѣлится на $a-b$ и на $a+b$. Дополнительный множитель для первой дроби есть $a+b$, для второй $a-b$; послѣ приведенія къ общему знаменателю дроби окажутся:

$$\frac{x(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{y(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{z}{a^2-b^2}$$

3-й случай, *когда знаменатели, всѣ или нѣкоторые, имѣютъ общихъ множителей.* Чтобы найти въ этомъ случаѣ простѣйшаго общаго знаменателя, *достаточно составить произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей, на которые разлагаются знаменатели, взявъ каждаго множителя съ наибольшимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ составъ*

знаменателей (такое произведеніе, по аналогіи съ цѣлыми числами, можно назвать *наименьшимъ кратнымъ* всѣхъ знаменателей).

Примѣры: 1) $\frac{az}{15x^2y^3}, \frac{y^2}{12x^3z^2}, \frac{az}{18xy^2}$

Общій знам. $=180x^3y^3z^2$

Дополн. мн.: для 1-й: $12xz^2$, для 2-й: $15y^3$, для 3-й: $10x^2z^2y$

$$\frac{12axz^3}{180x^3y^3z^2}, \frac{15y^5}{180x^3y^3z^2}, \frac{10ax^2yz^3}{180x^3y^3z^2}$$

$$2)\ \frac{1}{x^2+2x+1}, \frac{4}{x+2x^2+x^3}, \frac{5}{2x+2x^2}$$

Разлагаемъ знаменателей на множителей:

$x^2+2x+1=(x+1)^2$	доп. мн. $2x$
$x+2x^2+x^3=x(x+1)^2$	„ „ 2
$2x+2x^2=2x(x+1)$	„ „ $x+1$
Общ. знам. $=2x(x+1)^2$	

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2}, \frac{8}{2x(x+1)^2}, \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

$$3)\ \frac{2}{x^2-a^2}, \frac{1}{a-x}, \frac{3}{x+a}$$

Перемѣнимъ знаки въ знаменателѣ 2-й дроби на обратные, а чтобы не измѣнилось значеніе дроби, измѣнимъ знакъ и у ея числителя:

$$\frac{2}{x^2-a^2}, \frac{-1}{x-a}, \frac{3}{x+a}$$

Общ. зн. $=x^2-a^2$; доп. мн.: для 2-й дроби $x+a$, для 3-й $x-a$:

$$\frac{2}{x^2-a^2}, \frac{-x-a}{x^2-a^2}, \frac{3(x-a)}{x^2-a^2}$$

68. Сложеніе и вычитаніе дробей. По правилу дѣленія многочлена на одночленъ (§ 54) можемъ написать:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}, \quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$$

Читая эти равенства справа налѣво, замѣчаемъ слѣдующія **правила:**

1) чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно сложить ихъ числителей и подъ суммою подписать того же знаменателя;

2) чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно изъ числителя уменьшаемаго вычесть числителя вычитаемаго и подъ разностью подписать общаго знаменателя.

Если данныя для сложенія или вычитанія дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно ихъ слѣдуетъ привести къ одинаковому знаменателю.

Примѣры (надъ дробями надписаны дополнительные множители):

$$1)\ \overset{df}{\frac{a}{b}}+\overset{bf}{\frac{c}{d}}+\overset{bd}{\frac{e}{f}}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf};\quad 2)\ \overset{2b}{\frac{3m^2}{10a^2bc}}-\overset{5ca}{\frac{5n^2}{4ab^2}}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$$

$$3)\ \frac{x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$$

$2x-2=2(x-1)$	доп. мн. $=x+1$
$x+1=\ x+1$	„ „ $=2(x-1)$
$2x^2-2=2(x+1)(x-1)$	„ „ $=1.$
Общ. знам. $=2(x-1)(x+1)$	

$$\text{Сумма}=\frac{(x+1)(x+1)+(2x-3)2(x-1)-(x^2+3)}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2+2x+1+(4x^2-6x-4x+6)-x^2-3}{2(x^2-1)}=\frac{4x^2-8x+4}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{4(x-1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x+1}\ ^{*)}$$

---

*) **Замѣчаніе.** Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при вычитаніи дробей. Пусть, напр., дано:

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}$$

Подписывая общаго знаменателя, мы должны помнить, что знакъ ***минусъ*** относится ко всему числителю $b+c$, а не къ одному члену b; поэтому было бы ошибочно написать такъ:

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}=\frac{a-b+c}{m}$$

Правильный результатъ будетъ:

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}=\frac{a-(b+c)}{m}=\frac{a-b-c}{m}$$

69. Умноженіе дробей. *Чтобы перемножить нѣсколько дробей, достаточно произведеніе всѣхъ числителей раздѣлить на произведеніе всѣхъ знаменателей.*

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

Для доказательства умножимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства на произведеніе знаменателей bdf. Правая часть равенства, послѣ умноженія, обратится въ ace, потому что дѣленіе на bdf и умноженіе на bdf взаимно уничтожаются. Посмотримъ, во что обратится лѣвая часть равенства. Чтобы умножить на произведеніе bdf, достаточно умножить на b, полученный результатъ — на d и затѣмъ на f; поэтому:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)(bdf) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} . b . d . f$$

Переставимъ въ этомъ произведеніи сомножителей и сгруппируемъ ихъ такъ:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \left(\frac{c}{d} \cdot d\right) \left(\frac{e}{f} \cdot f\right)$$

Но $\frac{a}{b} . \, b = a$, $\frac{c}{d} . \, d = c$ и $\frac{e}{f} . \, f = e$; значитъ, въ окончательномъ результатѣ получимъ ace.

Оказывается, что обѣ части доказываемаго равенства послѣ умноженія на bdf обращаются въ одно и то же количество ace; значитъ, это равенство вѣрно *).

---

*) Вотъ еще иное доказательство. Положимъ, что

$$\frac{a}{b} = q \quad \frac{c}{d} = q' \quad \frac{e}{f} = q''$$

Отсюда: $a = bq \quad c = dq' \quad e = fq''$

Перемноживъ почленно эти равенства, получимъ:

$$ace = (bq)(dq')(fq'') = bqdq'fq''$$

Въ правой части этого равенства сгруппируемъ множителей такъ:

$$ace = (bdf)(qq'q'')$$

Отсюда: $\frac{ace}{bdf} = qq'q'' = \frac{b}{a} . \frac{c}{d} . \frac{e}{f}$

Цѣлое количество можно представить въ видѣ дроби, подписавъ подъ нимъ знаменателемъ 1. Поэтому правило умноженія дробей распространяется и на цѣлыя количества; напр.:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

70. Дѣленіе дробей. *Чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно умножить числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй и первое произведеніе раздѣлить на второе*, т.-е.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

И дѣйствительно, умноживъ предполагаемое частное на дѣлителя по правилу умноженія дробей, получимъ дѣлимое:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$$

Такъ какъ $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, то можно высказать другое правило: *чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.*

Правило дѣленія дроби на дробь заключаетъ въ себѣ также и правила дѣленія дроби на цѣлое и цѣлаго на дробь:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}$$

ГЛАВА XI.

Отрицательные показатели *).

71. Простѣйшее значеніе отрицательнаго показателя. Мы видѣли (§ 51,a), что выраженіе a^{-n}, гдѣ $-n$ есть отрицательное число, означаетъ частное, происходящее отъ дѣленія степеней a въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго на n единицъ. Пользуясь свойствами дробей, докажемъ теперь, что *количество съ отрицательнымъ показателемъ равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель—то же количество съ положительнымъ показателемъ.*

Дѣйствительно, a^{-n}, согласно нашему условію, представляетъ собою частное $a^m : a^{m+n}$, которое можно выразить дробью: $\frac{a^m}{a^{m+n}}$. Сокративъ эту дробь на a^m, найдемъ:

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}$$

Такимъ образомъ: $a^{-1}=\frac{1}{a}$, $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $(a+x)^{-3}=\frac{1}{(a+x)^3}$ и т. п.

72. Приведеніе дробнаго выраженія къ виду цѣлаго. При помощи отрицательныхъ показателей дробное алгебраическое выраженіе можно представить подъ видомъ цѣлаго; для этого стоитъ только всѣхъ множителей знаменателя перенести множителями въ числителя, взявъ ихъ съ отрицательными показателями. Напр.:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a.\frac{1}{b^2}.\ \frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}$$

Само собою разумѣется, что такое преобразованіе дробнаго выраженія въ цѣлое есть только измѣненіе одного внѣшняго вида этого выраженія, а не его содержанія.

---

*) Эта статья, при желаніи преподающаго, можетъ быть проходима непосредственно передъ статьей „Дробные показатели", т.-е. передъ § 258. Въ такомъ случаѣ къ статьѣ „Отрицательные показатели" должно добавить § 51, a, § 140, a и конецъ § 146, гдѣ говорится также объ отрицательныхъ показателяхъ.

73. Умноженіе и дѣленіе степеней съ отрицательными показателями. Такое измѣненіе внѣшняго вида имѣетъ однако важное значеніе, такъ какъ *дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями можно выполнять по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей положительныхъ*. Докажемъ это.

Умноженіе. Разсмотримъ отдѣльно три случая: 1) когда только множимое имѣетъ отрицательнаго показателя, 2) когда только множитель имѣетъ отрицательнаго показателя и 3) когда оба сомножителя съ отрицательными показателями. Предстоитъ доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ *показатели одинаковыхъ буквъ складываются*. Для этого поступимъ такъ: вмѣсто количества съ отрицательнымъ показателемъ подставимъ дробь, у которой числитель есть 1, а знаменатель—это же количество съ положительнымъ показателемъ, затѣмъ произведемъ дѣйствіе по правилу, относящемуся до дробей, и полученный результатъ сравнимъ съ тѣмъ, который предстоитъ доказать.

1) Требуется доказать, что $a^{-m}.a^n=a^{-m+n}$.

Доказательство: $a^{-m}a^n=\frac{1}{a^m}.a^n=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-m+n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m.a^{-n}=a^{m+(-n)}$.

Доказательство то же самое.

3) Требуется доказать, что $a^{-m}.a^{-n}=a^{-m+(-n)}$.

Док.: $a^{-m}.a^{-n}=\frac{1}{a^m}.\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^m a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m+(-n)}$.

Дѣленіе. Разсмотримъ также три случая:

1) Требуется доказать, что $a^{-m}:a^n=a^{-m-n}$.

Док.: $a^{-m}:a^n=\frac{1}{a^m}:a^n=\frac{1}{a^m.a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m-n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m:a^{-n}=a^{m-(-n)}$.

Док.: $a^m:a^{-n}=a^m:\frac{1}{a^n}=a^m.a^n=a^{m+n}=a^{m-(-n)}$.

3) Требуется доказать, что $a^{-m}:a^{-n}=a^{-m-(-n)}$.

Док.: $a^{-m}:a^{-n}=\frac{1}{a^m}:\frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-m-(-n)}$.

Такимъ образомъ, при дѣленіи степеней одинаковыхъ количествъ показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго и въ томъ случаѣ, когда эти показатели отрицательны.

Примѣры: 1) $(3a^{-2n}b^2c^{1-r})(0,8a^{n+1}b^{-3}c^{r+2})=2,4a^{1-n}b^{-1}c^3$.

2) $(x^{2n-r}y^{-m}z^2):(5x^{-r}y^3z^{-n})=\frac{1}{5}x^{2n}y^{-m-3}z^{n+2}$.

ГЛАВА XII.

Отношеніе и пропорція.

75. Отношеніе. *Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины наз. число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое* *).

Такъ, отношеніе 15 арш. къ 3 арш. есть число 5, потому что 15 арш.=3 арш.$\times$5; отношеніе 1 фунта къ 1 пуду есть число $^1/_{40}$, потому что 1 ф.=1 п.$\times$$^1/_{40}$.

Отношеніе именованныхъ чиселъ всегда можетъ быть замѣнено отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ; для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же единицѣ и взять отношеніе получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напр., отношеніе 10 фун. 16 лот. къ 3 лот. равно отношенію 336 лот. къ 3 лот., а это отношеніе равно отношенію отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 3.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить только объ отношеніи отвлеченныхъ чиселъ.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе (или числа, которыми выражены эти значенія), называются *членами* отношенія, причемъ первое значеніе

---

*) Указанное отношеніе наз. часто *геометрическимъ* или *кратнымъ* въ отличіе отъ другого отношенія, называемаго *ариѳметическимъ* или *разностнымъ*, подъ которымъ разумѣютъ разность двухъ чиселъ.

есть *предыдущій* членъ, а второе значеніе—*послѣдующій* членъ.

Изъ опредѣленія видно, что отношеніе можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія предыдущаго члена на послѣдующій. Поэтому отношеніе обозначается знакомъ дѣленія; такъ, отношеніе a къ b обозначается $a:b$ или $\frac{a}{b}$.

Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ; такъ, обозначивъ отношеніе $a:b$ черезъ q, получимъ:

$$a=bq,\ b=a:q$$

Напр., изъ отношенія $40:8=5$ находимъ: $40=8\,.\,5$, $8=40:5$.

79. Пропорція. *Равенство двухъ отношеній составляетъ пропорцію*; таково, напр., равенство:

$$8:4=40:20\left(\text{или } \frac{8}{4}=\frac{40}{20}\right) \text{ и вообще } a:b=c:d\left(\text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$$

Числа a и d наз. крайними, b и c — средними, a и c— предыдущими, b и d—послѣдующими членами пропорціи.

80. Теорема. *Въ пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.* Для доказательства назовемъ буквою q каждое изъ отношеній пропорціи $a:b=c:d$; тогда $a=bq$ и $d=\frac{c}{q}$. Перемноживъ эти два равенства, найдемъ:

$$ad=bq.\frac{c}{q}=\frac{bqc}{q}=bc. \text{ Что и тр. док.}$$

Отсюда слѣдуетъ: *крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній; средній членъ равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.*

81. Обратная теорема. *Если произведеніе двухъ чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцію, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого за средніе члены пропорціи.*

Док. Пусть дано: $mn=pq$. Раздѣливъ обѣ части этого равенства на каждое изъ 4-хъ произведеній: mp, mq, np и nq, получимъ:

$$\frac{mn}{mp}=\frac{pq}{mp};\quad \frac{mn}{mq}=\frac{pq}{mq};\quad \frac{mn}{np}=\frac{pq}{np};\quad \frac{mn}{nq}=\frac{pq}{nq}$$

Сокративъ каждую дробь, найдемъ:

$$\frac{n}{p}=\frac{q}{m};\quad \frac{n}{q}=\frac{p}{m};\quad \frac{m}{p}=\frac{q}{n};\quad \frac{m}{q}=\frac{p}{n}$$

что и требовалось доказать.

82. Перестановки членовъ. Въ каждой пропорціи можно переставлять члены: 1) средніе, 2) крайніе и 3) крайніе на мѣсто среднихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ. Выполнивъ всѣ возможныя перестановки, получимъ изъ одной пропорціи 8 пропорцій. Такъ, если данная пропорція есть $a:b=c:d$, то эти 8 пропорцій окажутся такія:

1) $a:b=c:d$ 5) $b:a=d:c$
2) $a:c=b:d$ 6) $c:a=d:b$
3) $d:b=c:a$ 7) $b:d=a:c$
4) $d:c=b:a$ 8) $c:d=a:b$

Переставивъ въ 1-й данной пропорціи средніе члены, получаемъ 2-ю пропорцію; переставивъ въ каждой изъ этихъ двухъ пропорцій крайніе члены, получаемъ 3-ю и 4-ю пропорціи; наконецъ, переставивъ въ каждой изъ 4-хъ пропорцій крайніе на мѣсто среднихъ и, наоборотъ, получаемъ еще 4 пропорціи.

83. Непрерывная пропорція. Среднее геометрическое. Пропорція наз. *непрерывной*, если у нея одинаковы оба среднихъ или оба крайнихъ члена. Такова, напр., пропорція:

$$36:12=12:4 \text{ или } 12:4=36:12$$

Повторяющійся членъ непрерывной геометрической пропорціи наз. *среднимъ геометрическимъ числомъ* двухъ остальныхъ членовъ пропорціи. Изъ пропорціи $a:b=b:c$ находимъ:

$$b^2=ac; \text{ откуда: } b=\sqrt{ac}$$

т.-е. *среднее геометрическое двухъ чиселъ равно корню квадратному изъ произведенія ихъ.*

Вообще, *среднимъ геометрическимъ* n *данныхъ чиселъ наз. корень* n-*й степени изъ произведенія всѣхъ этихъ чиселъ*; напр., среднее геометрическое чиселъ 8, 32 и 2 есть $\sqrt[3]{8.32.2}=$ $=\sqrt[3]{512}=8$.

83,*а*. Среднее ариѳметическое. Иногда разсматриваютъ такъ называемое *среднее ариѳметическое* нѣсколькихъ чиселъ, подъ которымъ разумѣютъ *частное отъ дѣленія суммы всѣхъ чиселъ на число ихъ*. Такъ, среднее ариѳметическое 4-хъ чиселъ: 10, 2, 8 и 12 равно:

$$\frac{10+2+8+12}{4}=\frac{32}{4}=8.$$

Изъ этого опредѣленія видно, что если въ суммѣ данныхъ чиселъ замѣнимъ каждое слагаемое среднимъ ариѳметическимъ, то сумма не измѣнится; такъ: $10+2+8+12$ равно $8+8+8+8=32$.

84. Сложныя пропорціи. Пусть имѣемъ двѣ пропорціи:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ и } \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$$

Перемноживъ и раздѣливъ почленно эти два равенства, получимъ новыя пропорціи, которыя наз. *сложными:*

$$1)\ \frac{aa'}{bb'}=\frac{cc'}{dd'} \text{ и } 2)\ \frac{ab'}{a'b}=\frac{cd'}{c'd}$$

85. Производныя пропорціи. Пусть имѣемъ пропорцію: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства или отнимемъ отъ нихъ по 1, отчего, конечно, равенство не нарушится:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$$

Приведемъ 1 къ общему знаменателю съ дробью:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{b}{b}=\frac{c}{d}\pm\frac{d}{d} \text{ или } \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} \qquad [1]$$

Получилась пропорція, которую можно прочесть такъ: *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія относится къ послѣдующему члену этого отношенія.*

Раздѣлимъ равенство (1) на данное равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; тогда знаменатели b и d сократятся, и мы получимъ:

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c} \qquad [2]$$

т.-е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія относится къ предыдущему члену этого отношенія.*

Равенство (1) представляетъ собою двѣ пропорціи:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ и } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Раздѣливъ первую на вторую, найдемъ:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \qquad [3]$$

т.-е. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.*

Переставимъ средніе члены въ пропорціяхъ (1), (2) и (3), получимъ еще 3 пропорціи, которыя полезно замѣтить:

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d} \qquad \frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c} \qquad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

Пропорціи, получаемыя изъ *одной* данной посредствомъ какихъ-либо дѣйствій надъ ея членами, наз. *производными.*

85,*a*. **Примѣненія.** Производными пропорціями иногда можно пользоваться для скорѣйшаго нахожденія неизвѣстнаго числа x. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1. $$\frac{3-x}{x}=\frac{40}{7}$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{3}{x}=\frac{47}{7};\text{ откуда } x=\frac{21}{47}$$

Примѣръ 2. $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{m}{n}$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{m+n}{m-n}\text{ или }\frac{a}{x}=\frac{m+n}{m-n}$$

$$\text{Откуда } x=\frac{a(m-n)}{m+n}$$

86. Свойство равныхъ отношеній. Пусть имѣемъ нѣсколько равныхъ отношеній:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots.$$

Обозначимъ черезъ q каждое изъ этихъ отношеній; тогда $\frac{a}{b}=q$, $\frac{a_1}{b_1}=q$ и т. д. Такъ какъ предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, то:

$$a=bq,\ a_1=b_1q \text{ и т. д.}$$

Сложимъ эти равенства почленно:

$$a+a_1+a_2\ldots=bq+b_1q+b_2q+\ldots.=q(b+b_1+b_2+\ldots)$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на $b+b_1+b_2+\ldots$:

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots}{b+b_1+b_2+\ldots}=q=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\ldots$$

т.-е. *сумма предыдущихъ членовъ нѣсколькихъ равныхъ отношеній относится къ суммѣ ихъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.*

Замѣчаніе. Такъ какъ пропорція представляетъ собою два равныя отношенія, то это свойство примѣнимо также и къ пропорціи.

86,*a*. Примѣненія. Этимъ свойствомъ равныхъ отношеній можно иногда пользоваться для скорѣйшаго нахожденія неизвѣстнаго числа x.

Примѣръ. $$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}$$

Составимъ новую пропорцію: сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ...:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}$$

Теперь составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему, какъ...:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{x};\ \text{откуда: } x=\frac{ab}{a+b}$$

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА I.

Общія начала рѣшенія уравненій.

87. Опредѣленія. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ $=$, составляютъ *равенство*.

Равенство состоитъ изъ двухъ *частей:* лѣвой и правой; напр., въ равенствѣ: $a+2a=3a$ лѣвая часть есть $a+2a$, а правая $3a$. Части уравненія можно мѣнять мѣстами; напр., если $a+2a=3a$, то и $3a=a+2a$.

Равенства раздѣляются на тождества и уравненія. Тождества подраздѣляются на буквенныя и числовыя.

Буквенное тождество есть такое равенство, содержащее буквы, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковыя численныя величины *при всевозможныхъ значеніяхъ* этихъ буквъ; другими словами, такое равенство, у котораго обѣ части суть тождественныя алгебраическія выраженія (§ 3). Таковы, напр., равенства:

$$(a+b)m=am+bm; \qquad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

Числовое тождество есть такое равенство, содержащее только числа, выраженныя цыфрами, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковую численную величину; напр. $(2+1)^2=9$.

Уравненіемъ наз. такое равенство, содержащее одну или нѣсколько буквъ, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ этихъ буквъ, а только при нѣкоторыхъ. Напр., равенство:

$$3x+5=2x+7$$

есть уравненіе, потому что части его $3x+5$ и $2x+7$ равны не при всякомъ значеніи буквы x, а только при $x=2$; точно такъ же равенство:

$$2x+y=10x-y$$

есть уравненіе, потому что части его имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ буквъ x и y (напр., при $x=2$, $y=3$ оно невозможно, тогда какъ при $x=2$, $y=8$ оно вѣрно).

Такія буквы въ уравненіи, которымъ нельзя приписывать всевозможныхъ численныхъ значеній, а только нѣкоторыя, наз. *неизвѣстными* уравненія; эти буквы берутся обыкновенно изъ послѣднихъ алфавита: x, y, z...

Уравненія могутъ быть съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и болѣе неизвѣстными. Такъ, уравненіе $3x+5=2x+7$ есть уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ, а уравненіе $2x+y=10x-y$ есть уравненіе съ 2 неизвѣстными.

Числа, которыя, подставленныя въ уравненіе вмѣсто его неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, наз. *корнями* уравненія или его *рѣшеніями;* о такихъ числахъ принято говорить, что они *удовлетворяютъ* уравненію. Напр., 2 есть корень уравненія $3x+5=2x+7$, потому что при $x=2$ это уравненіе обращается въ тождество $3.2+5=2.2+7$. Уравненіе $2x+y=10x-y$ имѣетъ корни $x=2$, $y=8$ и многіе другіе. Иногда уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ два корня и болѣе; напр., уравненіе $x^2+2=3x$ удовлетворяется при $x=2$ и $x=1$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всѣ его корни.

88. Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій. Возьмемъ для примѣра такую задачу:

Старшему брату 15 лѣтъ, а младшему 9. Сколько лѣтъ тому назадъ первый былъ втрое старше второго?

Назовемъ неизвѣстное число лѣтъ буквою x. Предположимъ теперь, что x найдено, и мы желаемъ повѣрить, удовлетворяетъ ли найденное число требованіямъ задачи. Тогда разсуждаемъ такъ: x лѣтъ тому назадъ старшему брату было не 15 лѣтъ, какъ теперь, а $15-x$; младшему брату тогда было не 9 лѣтъ, какъ теперь, а $9-x$. Условіе задачи требуетъ, чтобы $15-x$ было втрое болѣе $9-x$; значитъ, если $9-x$

умножимъ на 3, то мы должны получить число, равное $15-x$; поэтому для x можно взять только такое число, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$(9-x)3=15-x$$

Если сумѣемъ рѣшить это уравненіе, то задача будетъ рѣшена. Мы вскорѣ укажемъ весьма простые способы рѣшенія нѣкоторыхъ уравненій. Теперь же замѣтимъ, что полученное нами уравненіе можно, между прочимъ, рѣшить такими соображеніями. Такъ какъ произведеніе $(9-x)3$ тождественно равно $27-3x$, то это уравненіе можно написать такъ:

$$27-3x=15-x$$

Въ этомъ видѣ лѣвая и правая части уравненія суть разности. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что уменьшаемое въ лѣвой части, т.-е. 27, болѣе уменьшаемаго въ правой части, т.-е. 15-и, на 12; чтобы разности были равны, необходимо и достаточно, чтобы и вычитаемое въ лѣвой части, т.-е. $3x$, было болѣе вычитаемаго въ правой части, т.-е. x, тоже на 12; но $3x$ болѣе x на $2x$; слѣд., $2x=12$, откуда $x=6$.

Значитъ, 6 лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ втрое старше младшаго.

Только практика научаетъ, какъ, исходя изъ вопроса и условій задачи, составить одно или нѣсколько уравненій; *алгебра имѣетъ цѣлью указать способы рѣшенія уже составленныхъ уравненій*. Въ этомъ состоитъ другое назначеніе этой науки, еще болѣе важное, чѣмъ преобразованіе алгебраическихъ выраженій (см. § 4).

89. Равносильныя уравненія. Два или нѣсколько уравненій наз. равносильными *), если они имѣютъ одни и тѣ же корни. Напр., уравненія:

$$x^2+2=3x \quad \text{и} \quad x^2-3x+2=0$$

равносильны, потому что имѣютъ одни и тѣ же корни (именно $x=2$ и $x=1$).

---

*) Употребительны также названія: *эквивалентныя*, *тождественныя*, *однозначащія*.

90. Теорема 1. *Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ, или отъ нихъ вычтемъ, одно и то же число или одно и то же алгебраическое выраженіе, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.*

Пусть имѣемъ уравненіе $A=B$, гдѣ для краткости лѣвая часть обозначена одною буквою A, а правая буквою B (если, напр., уравненіе будетъ такое: $2x+y=10x-y$, то A означаетъ $2x+y$, а B означаетъ $10x-y$); пусть еще m есть какое-нибудь число, положительное или отрицательное (напр., 4, —3 и т. п.), или какое-нибудь алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя уравненія, или не содержащее ихъ (напр., $3+5x$, или $2a-b$ и т. п.). Требуется доказать, что уравненія:

$$A=B \quad [1] \quad \text{и} \quad A+m=B+m \quad [2]$$

равносильны, т.-е. имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся, что всѣ корни уравненія [1] принадлежатъ и ур. [2], и обратно: всѣ корни уравненія [2] принадлежатъ и ур. [1].

Пусть $x=a$, $y=b$... будутъ корни ур. [1]. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ выраженія A и B дѣлаются равными; но въ такомъ случаѣ очевидно, что и суммы $A+m$ и $B+m$ при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ сдѣлаются равными другъ другу (такъ какъ m всегда равно m); слѣд., всѣ корни уравненія [1] удовлетворяютъ и уравненію [2].

Обратно: пусть $x=a'$, $y=b'$... будутъ корни уравненія [2]. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ суммы $A+m$ и $B+m$ дѣлаются равными; но въ такомъ случаѣ очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ сдѣлаются равными выраженія A и B; значитъ, всѣ корни уравненія [2] принадлежатъ и уравненію [1].

Отсюда слѣдуетъ, что уравненія [1] и [2] имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. эти уравненія равносильны.

Такъ какъ вычитаніе какого-нибудь числа равносильно прибавленію этого числа съ обратнымъ знакомъ, то изложенное разсужденіе примѣнимо и къ тому случаю, когда отъ обѣихъ частей уравненія отнимается одно и то же число или алгебраическое выраженіе.

Слѣдствія. I. *Члены уравненія можно переносить изъ одной его части въ другую, перемѣнивъ передъ такими членами знаки на обратные.*

Напр., если къ обѣимъ частямъ уравненія $8+x^2=7x-2$ прибавимъ по 2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2=7x-2 \\ +2 \qquad +2 \\ \hline 8+x^2+2=7x \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ -2 изъ правой части даннаго уравненія перешелъ въ лѣвую съ обратнымъ знакомъ $+$.

Вычтя изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія по x^2, получаемъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2+2=7x \\ -x^2 \qquad -x^2 \\ \hline 8+2=7x-x^2 \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ $+x^2$ перешелъ изъ лѣвой части уравненія въ правую съ обратнымъ знакомъ.

II. *Если два одинаковые члена съ одинаковыми знаками стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія, то такіе члены можно уничтожить.* Пусть, напр., даны уравненія:

$$6x+3=x^2+3 \qquad 7x^2-x=3-x$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей перваго уравненія по 3 и приложивъ къ обѣимъ частямъ второго уравненія по x, получимъ:

$$6x=x^2 \qquad 7x^2=3$$

Такимъ образомъ, одинаковые члены $+3$ и $+3$ въ первомъ уравненіи и одинаковые члены $-x$ и $-x$ во второмъ уравненіи уничтожились.

III. *Передъ всѣми членами уравненія можно перемѣнить знаки на обратные*, потому что это равносильно перенесенію всѣхъ членовъ изъ лѣвой части въ правую, а изъ правой въ лѣвую. Напр., сдѣлавъ такое перенесеніе членовъ въ уравненіи $8+x^2=7x-2$, получимъ:

$$-7x+2=-8-x^2 \text{ или } -8-x^2=-7x+2$$

91. Замѣчаніе. Истина, изложенная въ предыдущемъ §, не теряетъ силы и тогда, когда какой-нибудь корень ур. $A=B$ обращаетъ въ ∞ выраженіе, прибавляемое къ обѣимъ частямъ уравненія.

Пусть, напр., къ частямъ уравненія $2x+1=3$ мы приложили по $\frac{1}{1-x}$:

$$1)\ 2x+1=3 \qquad 2)\ 2x+1+\frac{1}{1-x}=3+\frac{1}{1-x}$$

Уравненіе 1) имѣетъ корень $x=1$; это значеніе x обращаетъ выраженіе $\frac{1}{1-x}$ въ $\frac{1}{0}=\infty$ и уравненіе 2-е при $x=1$ принимаетъ видъ $\infty=\infty$; поэтому возникаетъ вопросъ: можно ли въ этомъ случаѣ утверждать, что корень ур. 1-го есть также и корень ур. 2-го? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, надо условиться, какъ слѣдуетъ понимать равенство $\infty=\infty$, не имѣющее смысла само по себѣ. Въ математикѣ это равенство принимаютъ за *тождество* лишь въ томъ случаѣ, когда обѣ части уравненія, изъ котораго оно получилось, увеличиваясь безпредѣльно, безгранично приближаются къ равенству между собою; другими словами, *когда по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличенія обѣихъ частей уравненія разность между ними неограниченно уменьшается.*

Условившись въ этомъ, допустимъ, что $x=a$ есть корень у. $A=B$, обращающій выраженіе m въ ∞. Посмотримъ, къ чему стремится разность между обѣими частями ур. $A+m=B+m$ по мѣрѣ приближенія x къ a:

$$(A+m)-(B+m)=A+m-B-m=A-B$$

Такъ какъ, по условію, a есть корень ур. $A=B$, то при $x=a$ разность $A-B=0$; значитъ, равенство $\infty=\infty$, получаемое изъ ур. $A+m=B+m$ при $x=a$, должно быть принимаемо за тождество, и потому $x=a$ есть корень ур. $A+m=B+m$.

Обратно, пусть при $x=b$ уравн. $A+m=B+m$ обращается въ *тождество*: $\infty=\infty$; въ такомъ случаѣ b должно считать за корень уравненія $A+m=B+m$. Не трудно видѣть, что b будетъ и корень уравненія $A=B$. Въ самомъ дѣлѣ, если равенство $\infty=\infty$ есть тождество, то разность $(A+m)-(B+m)$ должна безгранично уменьшаться по мѣрѣ приближенія x къ b и, слѣд., при $x=b$ должна обратиться въ нуль. Но $(A+m)-(B+m)=$ $=A-B$; значитъ, при $x=b$, разность $A-B$ дѣлается равной нулю, т.-е. A становится равнымъ B.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что уравненія: $A=B$ и $A+m=B+m$ равносильны при всякомъ m, какъ зависящемъ, такъ и независящемъ отъ x.

92. Теорема 2. *Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число или алгебраическое выраженіе, не равное нулю и не содержащее неизвѣстныхъ, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.*

Пусть m есть какое-нибудь число или алгебраическое выраженіе, не равное 0 и не содержащее неизвѣстныхъ; требуется доказать, что уравненія:

$$A=B \quad [1] \qquad \text{и} \qquad Am=Bm \quad [2]$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого достаточно убѣдиться, что всѣ корни ур. [1] принадлежатъ ур. [2] и, наоборотъ, всѣ корни ур. [2] принадлежатъ ур. [1].

Пусть $x=a$, $y=b$.... будутъ корни ур. [1]. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ выраженія A и B дѣлаются равными; но въ такомъ случаѣ очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ сдѣлаются равными и произведенія Am и Bm (такъ какъ m всегда равно m); значитъ, всѣ корни ур. [1] удовлетворяютъ и ур. [2].

Обратно: пусть $x=a'$, $y=b'$,.... будутъ корни ур. [2], т.-е. при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ Am дѣлается равнымъ Bm, и слѣд.:

$$Am-Bm=0 \text{ или } (A-B)m=0$$

Но произведеніе равняется нулю только тогда, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей равенъ нулю; значитъ, равенство $(A-B)m=0$ возможно только тогда, когда или $m=0$, или $A-B=0$; но m, по условію, не равно нулю; слѣд., при $x=a'$, $y=b'$,... разность $A-B$ равна нулю, т.-е. $A=B$. Такимъ образомъ, всѣ корни ур. [2] должны удовлетворять и ур. [1].

Отсюда слѣдуетъ, что уравненія $A=B$ и $Am=Bm$ имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны.

Такъ какъ дѣленіе на какое-нибудь число равносильно умноженію на обратное число, то изложенное разсужденіе относится и къ дѣленію обѣихъ частей уравненія на одно и то же число или выраженіе, не равное нулю и не содержащее неизвѣстныхъ *).

Почему нельзя умножать части уравненія на 0. Если обѣ части уравненія $A=B$ умножимъ на *нуль*, то получимъ:

---

*) Теорема имѣетъ еще исключеніе: *если выраженіе, на которое умножаемъ или дѣлимъ, не равно ни* ∞, *ни* $\frac{0}{0}$. Дѣйствительно, отъ умноженія на такое выраженіе уравненіе принимаетъ видъ равенства: $\infty=\infty$ *или* $\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$, которое, по изслѣдованіи его, можетъ оказаться не тождественнымъ данному уравненію.

$A.o = B.o$. Это равенство есть тождество, вѣрное при *всевозможныхъ* значеніяхъ неизвѣстныхъ, такъ какъ произведенія $A.o$ и $B.o$ равны 0 при всякихъ значеніяхъ A и B; тогда какъ равенство $A=B$ есть *уравненіе*, обращающееся въ тождество только при *нѣкоторыхъ* значеніяхъ неизвѣстныхъ; значитъ, отъ умноженія частей уравненія на нуль получается другое равенство, не равносильное первому.

Почему нельзя умножать части уравненія на алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя. Возьмемъ для примѣра какое-нибудь уравненіе, напр., такое:

$$2x-1=3x-3 \qquad [1]$$

и умножимъ обѣ его части на выраженіе, содержащее неизвѣстное, напр., на $x-3$:

$$(2x-1)(x-3)=(3x-3)(x-3) \qquad [2]$$

Уравненіе [1] имѣетъ только одинъ корень $x=2$; этотъ корень удовлетворяетъ и уравненію [2]. Но послѣднее уравненіе имѣетъ еще *особый корень* $x=3$. Дѣйствительно, при $x=3$ множитель $x-3$ обращается въ нуль и уравненіе [2] при $x=3$ даетъ тождество:

$$5.0=6.0, \text{ т.-е. } 0=0$$

Значитъ, отъ умноженія обѣихъ частей уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстное, мы можемъ ввести такъ называемыя *постороннія* рѣшенія, т.-е. рѣшенія, не удовлетворяющія данному уравненію; *эти рѣшенія суть тѣ, при которыхъ выраженіе, на которое умножаемъ, обращается въ нуль.*

Обратно, при дѣленіи частей уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, мы можемъ *потерять* нѣкоторые корни уравненія, именно тѣ, которые обращаютъ въ 0 это выраженіе; такъ, уравненіе [2] при дѣленіи его частей на $x-3$ теряетъ одинъ корень $x=3$.

Замѣчаніе. *Если* m *есть алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя,* то умноженіе или дѣленіе обѣихъ частей уравненія на m приводитъ вообще къ уравненію, *не равносильному данному,* еще и по другой причинѣ.

Можетъ случиться, что нѣкоторые корни ур. $A=B$ обращаютъ m въ ∞ или въ $\frac{0}{0}$, причемъ равенство: $\infty=\infty$ или $\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$, получающееся изъ уравн. $Am=Bm$, можетъ и не оказаться тождествомъ; въ этомъ случаѣ нѣкоторые корни ур. $A=B$ не удовлетворяютъ ур. $Am=Bm$. Напр.:

$$1)\ x^2=4;\qquad m=\frac{1}{x-2}\qquad 2)\ x^2.\frac{1}{x-2}=4.\frac{1}{x-2}$$

Ур. 1) имѣетъ 2 корня: $x=2$ и $x=-2$; первый изъ нихъ обращаетъ m въ ∞, и ур. 2) даетъ: $\infty=\infty$. Чтобы узнать, тождество ли это, или нѣтъ, надо найти разность между лѣвою и правою частями ур. 2). Эта разность равна $\frac{x^2}{x-2}-\frac{4}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, что при $x=2$ даетъ не 0, а 4; слѣд., $x=2$ не есть кор. ур. 2).

Слѣдствія. I. *Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю и не содержащаго неизвѣстныхъ, то уравненіе можно на него сократить*. Напр.:

$$60x-160=340-40x$$

Раздѣливъ всѣ члены на 20, получимъ уравненіе болѣе простое:

$$3x-8=17-2x$$

II. *Уравненіе можно освободить отъ дробныхъ членовъ*. Напр.:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=7,1666...$$

Обративъ число 7,166... въ обыкновенную дробь, получимъ $\frac{43}{6}$; теперь приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12}\quad\text{или:}\quad\frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}$$

Отбросивъ общаго знаменателя, мы тѣмъ самымъ умножимъ обѣ части уравненія на одно и то же, не равное нулю, число 12; отъ этого получимъ уравненіе, равносильное данному:

$$14x-6-(3x-15)=86\quad\text{или:}\quad 14x-6-3x+15=86$$

93. Исключенія изъ теоремы предыдущаго параграфа имѣютъ важное значеніе при рѣшеніи уравненій, *содержащихъ неизвѣстное въ знаменателяхъ*. Чтобы рѣшить такія

уравненія, надо привести ихъ къ цѣлому виду. Если при этомъ поступать по обыкновенному пріему, т.-е. привести всѣ члены уравненія къ одинаковому знаменателю и затѣмъ его отбросить, то можно иногда получить уравненіе, не равносильное данному; въ самомъ дѣлѣ, отбрасываніе знаменателя равносильно умноженію на него обѣихъ частей уравненія, а мы видѣли, что умноженіе частей уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, можетъ привести къ уравненію, не равносильному данному.

Ниже приведены примѣры (стр. 82 и 83), на которыхъ уясняется, какъ слѣдуетъ поступать въ такихъ случаяхъ.

ГЛАВА II.

Уравненія, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

94. Изложимъ здѣсь болѣе подробно, какъ слѣдуетъ поступать съ уравненіями, содержащими въ знаменателяхъ неизвѣстныя. Для простоты будемъ говорить лишь объ уравненіяхъ, содержащихъ одно неизвѣстное x. Перенеся всѣ члены уравненія въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ уравненіе вида:

$$\frac{A}{B}=0,$$

гдѣ A и B суть вообще многочлены, цѣлые относительно x. Дробь $\frac{A}{B}$ можетъ равняться нулю только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ: или 1) когда $A=0$, или 2) когда $B=\infty$. Разсмотримъ сначала первое предположеніе. Положимъ, что, рѣшивъ уравненіе $A=0$, мы нашли корни: $x_1=a$, $x_2=b$ и т. д. Подставимъ эти корни въ B. Если ни одинъ изъ нихъ не обратитъ B въ нуль, то всѣ эти корни годны для даннаго уравненія. Если же какой-нибудь изъ нихъ, напр. $x_1=a$, обратитъ B въ нуль, этотъ корень должно подвергнуть испытанію, такъ какъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, получаемое въ этомъ случаѣ для дроби $\frac{A}{B}$, можетъ оказаться не равнымъ 0. Чтобы раскрыть истинный смыслъ неопредѣленнаго выраженія, замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ многочлены A и B дѣлятся на $x-a$ (§ 58, слѣдствіе), и потому мы можемъ сократить дробь $\frac{A}{B}$ на $x-a$; тогда получимъ новую

дробь $\frac{A_1}{B_1}$; если при $x=a$ числитель A_1 равняется 0, а знаменатель B_1 не равенъ 0, то корень $x=a$ годится; если при $x=a$ и A_1, и B_1 равны 0, то этотъ корень надо испытать (по предыдущему); если же при $x=a$ числитель A_1 не равенъ 0, то этотъ корень надо отбросить.

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, т.-е. допустимъ, что $B=\infty$. Такъ какъ B есть *цѣлый* многочленъ, то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x=\infty$. При этомъ значеніи x дробь $\frac{A}{B}$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть истинный смыслъ этого неопредѣленнаго выраженія, предположимъ сначала, что степень B выше степени A Пусть, напр., $A=x^2-3x+2$ и $B=x^3+4x^2-3x+1$, т.-е. дробь имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+4x^2-3x+1}=0$$

Въ этомъ случаѣ можно доказать, что истинное значеніе $\frac{\infty}{\infty}$ есть нуль. Дѣйствительно, раздѣливъ числителя и знаменателя на x^2, получимъ:

$$\frac{1-{}^3/_x+{}^2/x^2}{x+4-{}^3/_x+{}^1/x^2}=0$$

Положивъ теперь $x=\infty$, получимъ тождество: $0=0$. Вообще: *когда степень знаменателя выше степени числителя, уравненіе* $\frac{A}{B}$ *сверхъ корней ур.* $A=0$ *имѣетъ еще особый корень* $x=\infty$ *).

Пусть теперь степень знаменателя не выше степени числителя. Напр.:

$$\frac{A}{B}=\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5}=0$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x^2, получимъ:

$$\frac{1-{}^3/_x+{}^2/x^2}{2-{}^5/x^2}=0$$

---

*) Было бы ошибочно полагать, что значеніе $x=\infty$ не должно быть включаемо въ число корней уравненія. Во-первыхъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ такое рѣшеніе уравненія даетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ задачи; напр., когда отыскиваютъ разстояніе точки пересѣченія двухъ прямыхъ отъ нѣкоторой постоянной точки, рѣшеніе $x=\infty$ означаетъ, что линіи должны быть параллельны другъ другу. Во-вторыхъ, безконечное рѣшеніе означаетъ, что по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличенія x обѣ части уравненія неограниченно стремятся къ равенству другъ съ другомъ, что иногда имѣетъ весьма цѣнное значеніе.

Положивъ $x=\infty$, получимъ невозможное равенство $^1/_2=0$. Слѣд.: *когда степень знаменателя не выше степени числителя, ур.* $\frac{A}{B}$ *не имѣетъ иныхъ корней, кромѣ тѣхъ, которые принадлежатъ ур.* $A=0$.

Примѣръ 1. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{2x-1}{x^2-4}=0$$

Дробь, стоящая въ лѣвой части уравненія, несократима. Отбросивъ знаменателя получимъ:

$$2x-1=0, \quad \text{откуда:} \quad x=^1/_2$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то данное уравненіе имѣетъ еще особый корень $x=\infty$. Дѣйствительно:

$$\frac{1}{\infty-2.}+\frac{1}{\infty+2}=\frac{1}{\infty^2-4}, \text{ т.-е. } 0+0=0$$

Замѣтимъ, что если бы въ этомъ примѣрѣ мы не обратили вниманія на отброшеннаго знаменателя, то не замѣтили бы одного корня, именно $x=\infty$.

Примѣръ 2. $\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}=0$$

Числитель дроби представляетъ произведеніе $(x-2)$ $(x-1)$; поэтому дробь можно сократить на $x-2$; послѣ сокращенія получимъ:

$$\frac{x-1}{x-2}=0, \; x-1=0, \text{ откуда } x=1$$

Особаго корня въ этомъ примѣрѣ нѣтъ, такъ какъ степень знаменателя не выше степени числителя.

Замѣтимъ, что, если бы въ этомъ примѣрѣ мы отбросили общаго знаменателя, не перенося всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія, то получили бы лишній корень $x=2$.

ГЛАВА III.

Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

95. Подраздѣленіе уравненій. По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя неизвѣстными, съ тремя и болѣе неизвѣстными. Кромѣ того, уравненія раздѣляются по степенямъ неизвѣстныхъ: уравненія первой степени, уравненія второй степени и т. д.

Чтобы судить о степени даннаго уравненія, въ немъ нужно предварительно сдѣлать слѣдующія преобразованія: раскрыть скобки, уничтожить знаменателей, перенести всѣ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Когда всѣ эти преобразованія выполнены (на самомъ дѣлѣ или только въ умѣ), то

степенью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ наз. показатель при неизвѣстномъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ этотъ показатель наибольшій;

степенью уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными наз. сумма показателей при неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма наибольшая.

Такимъ образомъ, ур. $5x^2-3x=4$ есть уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ, ур. $5x^2y-3xy+8x=0$ есть уравненіе третьей степени съ 2 неизвѣстными.

96. Покажемъ на слѣдующемъ примѣрѣ, **какъ рѣшается уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:**

$$\frac{2(x-5)}{3}=\frac{3(2-x)}{2}-x$$

Чтобы рѣшить это уравненіе, выполняютъ слѣдующія преобразованія:

1) раскрываютъ скобки: $\frac{2x-10}{3}=\frac{6-3x}{2}-x$

2) освобождаютъ ур. отъ знам.: $4x-20=18-9x-6x$;

3) переносятъ извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую: $4x+9x+6x=18+20$;

4) дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ: $19x=38$;

5) дѣлятъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ:

$$\frac{19x}{19}=\frac{38}{19} \text{ или: } x=2$$

Такъ какъ каждое изъ этихъ преобразованій приводитъ къ уравненію, равносильному съ уравненіемъ не преобразованнымъ, то, значитъ, и послѣднее уравненіе ($x=2$) равносильно съ даннымъ; но послѣднее уравненіе, очевидно, имѣетъ корень 2; значитъ, и данное уравненіе должно имѣть тотъ же корень.

Найдя корень уравненія, полезно повѣрить правильность рѣшенія; для этого подставляютъ въ данное (не преобразованное) уравненіе вмѣсто x найденное число; если послѣ подстановки получится тождество, то уравненіе рѣшено правильно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное число 2, получимъ:

$$\frac{2(2-5)}{3}=\frac{3(2-2)}{2}-2, \text{ т.-е. } -2=-2$$

Значитъ, уравненіе рѣшено правильно.

Само собою разумѣется, что не во всѣхъ случаяхъ потребны всѣ пять указанныхъ преобразованій.

Для уясненія нѣкоторыхъ особенностей при рѣшеніи уравненій разсмотримъ еще слѣдующіе 5 примѣровъ.

Примѣръ 1. Знаменатели не содержатъ неизвѣстнаго.

$$\frac{\frac{8x}{3}-4}{9}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{7-\frac{x-3}{2}}{3}-\frac{8}{9}$$

Для рѣшенія этого уравненія сначала приведемъ члены каждой дроби къ цѣлому виду (см. § 64):

$$\frac{8x-12}{27}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{14-x+3}{6}-\frac{8}{9}$$

Найдя общаго знаменателя 54, надписываемъ надъ каждымъ членомъ уравненія дополнительнаго множителя:

$$\overset{2}{\frac{8x-12}{27}}-\overset{9}{\frac{5x-3}{6}}+\overset{54}{x}=\overset{9}{\frac{17-x}{6}}-\overset{6}{\frac{8}{9}}$$

Затѣмъ приводимъ къ общему знаменателю всѣ члены уравненія, отбрасываемъ его и поступаемъ далѣе, какъ обыкновенно:

$$16x-24-45x+27+54x=153-9x-48$$

$$16x-45x+54x+9x=153-48+24-27;\ 34x=102;\ x=3.$$

Повѣрка: $\frac{8-4}{9}-2+3=\frac{7}{3}-\frac{8}{9}$, т.-е. $\frac{13}{9}=\frac{13}{9}$

Примѣръ 2. Знаменатели содержатъ неизвѣстное; отбрасываніе общаго знаменателя не вводитъ посторонняго корня.

$$\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{2x-1}{2x+1}$$

Чтобы удобнѣе привести всѣ члены этого уравненія къ общему знаменателю, перемѣнимъ въ знаменателѣ второй дроби знаки на обратные, а чтобы отъ этого не измѣнилось значеніе дроби, перемѣнимъ знакъ передъ дробью (см. § 65):

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}$$

Такъ какъ $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$, то это и есть общій знаменатель; дополнительные множители будутъ: для первой дроби $2x+1$, для третьей $2x-1$:

$$(2x+1)^2-8=(2x-1)^2;\ 4x^2+4x+1-8=4x^2-4x+1;$$

$$8x=8;\qquad x=1.$$

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось откинуть общаго знаменателя $4x^2-1$, т.-е., другими словами, пришлось обѣ части уравненія умножить на выраженіе $4x^2-1$, содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ убѣдиться, не будетъ ли найденный корень $x=1$ *постороннимъ*, т.-е. не обращаетъ ли онъ въ 0 выраженіе $4x^2-1$, на которое намъ пришлось умножить обѣ части даннаго уравненія. Подставивъ 1 вмѣсто x въ выраженіе $4x^2-1$, мы получаемъ 3, а не 0. Значитъ, найденный корень не есть посторонній. И, дѣйствительно, данное уравненіе при $x=1$ обращается въ тождество:

$$\frac{3}{1}+\frac{8}{-3}=\frac{1}{3};\ 3-2\frac{2}{3}=\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ ^{*)}$$

---

*) Это уравненіе имѣетъ еще корень $x=\infty$ (см. § 94).

Примѣръ 3. Знаменатели содержатъ неизвѣстное; отбрасываніе общаго знаменателя вводитъ посторонній корень.

$$3+\frac{1}{x-2}=\frac{4x-7}{x-2}$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, получимъ:

$3x-6+1=4x-7$; $3x-4x=-7+6-1$; $-x=-2$.

Умноживъ обѣ части уравненія на -1, найдемъ: $x=2$.

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось умножить обѣ части его на выраженіе $x-2$, содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ рѣшить, не будетъ ли найденный корень постороннимъ. Подставивъ 2 вмѣсто x въ выраженіе $x-2$, получаемъ 0. Изъ этого заключаемъ, что корень $x=2$ *можетъ быть* постороннимъ. Чтобы рѣшить это окончательно, надо сдѣлать подстановку:

$$3+\frac{1}{0}=\frac{1}{0}$$

Въ такомъ видѣ равенство ничего не выражаетъ, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно. Но если въ данномъ уравненіи перенесемъ всѣ члены въ одну часть, то получимъ:

$$3+\frac{1}{x-2}-\frac{4x-7}{x-2}=0;\ \frac{3x-6+1-4x+7}{x-2}=\frac{-x+2}{x-2}=0;$$

$$\frac{-(x-2)}{x-2}=0$$

Сокративъ дробь въ лѣвой части уравненія на $x-2$, окончательно получимъ: $-1=0$, что представляетъ невозможное равенство. Значитъ, данное уравненіе *не имѣетъ корня.*

Примѣръ 4. Уравненіе, приводящееся къ тождеству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-25=\frac{5}{6}(x-30)$$

По освобожденіи отъ знаменателей, получимъ:

$$3x+2x-150=5(x-30)$$

или $5x-150=5x-150$

или $5x-5x=150-150$, т.-е. $0=0$

Это равенство есть *тождество*, т.-е. оно вѣрно *при всякомъ значенiи* x. Значитъ, уравненiе имѣетъ произвольные корни.

Примѣръ 5. Уравненiе, приводящееся къ нелѣпому равенству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)+7$$

По раскрытiи скобокъ и освобожденiи отъ знаменателей, находимъ:

$$6x+4x=15x-5x+84$$

или $10x=10x+84$

или $10x-10x=84$, т.-е. $0=84$

Такъ какъ это равенство невозможно, то уравненiе не имѣетъ ни одного корня.

ГЛАВА IV.

Система двухъ уравненiй съ двумя неизвѣстными.

97. Одно уравненiе съ двумя неизвѣстными. Такое уравненiе имѣетъ *безчисленное множество корней*. Для примѣра возьмемъ уравненiе:

$$3x-5y=2$$

Если вмѣсто одного неизвѣстнаго, напр., y, будемъ подставлять произвольныя числа: 0, 1, 2, 3,....., то послѣ всякой подстановки будемъ получать уравненiе съ однимъ неизвѣстнымъ x; рѣшивъ это уравненiе, найдемъ для x число, соотвѣтствующее взятой величинѣ y. Если, напр., $y=0$, то получимъ: $3x=2$, откуда $x={}^2/_3$; если $y=1$, то $3x-5=2$, откуда $x={}^7/_3$, и т. д.

Уравненiе, имѣющее безчисленное множество корней, наз. *неопредѣленнымъ*.

98. Система уравненiй. Совокупность нѣсколькихъ уравненiй, въ которыхъ неизвѣстныя означаютъ *одни и тѣ же числа,* наз. *системою* уравненiй. Если, напр., два уравненiя:

$$2x-5=3y-2 \text{ и } 8x-y=2y+21$$

разсматриваются при томъ условiи, что неизвѣстныя x и y

должны имѣть одинаковыя численныя значенія для обоихъ уравненій, то такія уравненія образуютъ систему.

Для показанія того, что данныя уравненія образуютъ систему, ихъ обыкновенно пишутъ одно подъ другимъ и слѣва отъ нихъ ставятъ скобку такимъ образомъ:

$$\begin{cases} 2x-5=3y-\ 2 \\ 8x-y=2y+21 \end{cases}$$

Рѣшить систему уравненій значитъ найти всѣ числа, которыя *удовлетворяютъ* этой системѣ (корни уравненій), т.-е. найти всѣ числа, которыя, подставленныя въ данныя уравненія вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ ихъ въ тождества. Совокупность этихъ чиселъ наз. *рѣшеніемъ* системы.

99. Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ нѣсколько способовъ. Всѣ они имѣютъ цѣлью привести два уравненія съ двумя неизвѣстными къ одному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ или, какъ говорятъ, *исключить одно неизвѣстное.*

100. Способъ подстановки. Пусть имѣемъ систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16 \\ 10x+3y=-17 \end{cases}$$

и желаемъ исключить x. Для этого разсуждаемъ такъ: если бы число y было найдено, то x мы могли бы найти, подставивъ въ одно изъ уравненій вмѣсто y найденное число и рѣшивъ получившееся отъ этого уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Напр., если бы найденное для y число мы подставили въ первое уравненіе, то получили бы для x (предполагая y извѣстнымъ):

$$x=\frac{5y-16}{8}$$

Такъ какъ второе уравненіе должно удовлетворяться тѣми же значеніями неизвѣстныхъ, какъ и первое, то мы можемъ подставить въ него вмѣсто x найденное для него выраженіе, отчего получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y:

$$10\left(\frac{5y-16}{8}\right)+3y=17$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$\frac{5(5y-16)}{4}+3y=17;\ 25y-80+12y=68;\ 37y=148;\ y=4$$

тогда: $$x=\frac{5y-16}{8}=\frac{5.4-16}{8}=\frac{1}{2}$$

Мы могли бы, предположивъ x найденнымъ, опредѣлить изъ одного уравненія y въ зависимости отъ x и полученное для y выраженіе подставить въ другое уравненіе.

Правило. *Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными способомъ подстановки, опредѣляютъ изъ какого-либо уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученное выраженіе вставляютъ въ другое уравненіе; отъ этого получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; рѣшивъ его, опредѣляютъ это неизвѣстное; подставивъ найденное число въ формулу, выведенную раньше для перваго неизвѣстнаго, опредѣляютъ и это другое неизвѣстное.*

Замѣчаніе. Этотъ способъ особенно удобенъ тогда, когда коэффиціентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ равенъ 1.

101. Способъ сравненія. Пусть имѣемъ ту же систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16 \\ 10x+3y=\ \ 17 \end{cases}$$

Желая исключить x, предположимъ, что y найдено. Опредѣлимъ x изъ каждаго уравненія:

$$x=\frac{5y-16}{8}\quad[1]\qquad x=\frac{17-3y}{10}\quad[2]$$

Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя должны означать одни и тѣ же числа, то мы можемъ полученныя для x два выраженія соединить знакомъ равенства (*сравнить* ихъ между собою):

$$\frac{5y-16}{8}=\frac{17-3y}{10}$$

Откуда: $25y-80=68-12y$; $37y=148$; $y=4$

Подставивъ это число въ одну изъ формулъ [1] или [2], найдемъ x:

$$x=\frac{5.4-16}{8}=\frac{1}{2}\ \text{или:}\ x=\frac{17-3.4}{10}=\frac{1}{2}$$

Неизвѣстное x мы могли бы также найти, исключивъ способомъ сравненія y.

Такимъ образомъ, *чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвѣстное по способу сравненія, надо изъ каждаго уравненія опредѣлить одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученныя два выраженія соединить знакомъ равенства.*

102. Способъ сложенія и вычитанія. Предположимъ сначала, что въ данной системѣ уравненій коэффиціенты при

какомъ-нибудь одномъ и томъ же неизвѣстномъ, напр. при y, будутъ одинаковы. При этомъ могутъ представиться два случая: или знаки передъ такими коэффиціентами разные, или они одинаковые. Пусть, напр., данныя системы будутъ такія:

1-я система.

$$\begin{cases} 7x-\mathbf{2}y=27 \\ 5x+\mathbf{2}y=33 \end{cases}$$

2-я система.

$$\begin{cases} 5x+\mathbf{8}y=31 \\ 3x+\mathbf{8}y=25 \end{cases}$$

Сложимъ почленно уравненія первой системы и вычтемъ почленно уравненія второй системы:

$$\begin{array}{r} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \\ \hline 12x \quad =60 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{r} 5x+8y=31 \\ -3x\pm 8y=-25 \\ \hline 2x \quad = 6 \end{array}$$

Такимъ образомъ, одно неизвѣстное исключилось. Изъ полученныхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{60}{12}=5 \qquad \Bigg| \qquad x=\frac{6}{2}=3$$

Вставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденное для него число, найдемъ y:

$$\begin{array}{c} 7.5-2y=27 \\ y=4 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{c} 5.3+8y=31 \\ y=2 \end{array}$$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій, въ которыхъ коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ не одинаковы, напр. такую:

$$\begin{cases} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10 \end{cases}$$

Пусть желаемъ исключить y. Для этого преобразуемъ уравненія такъ, чтобы передъ y коэффиціенты оказались одинаковы. Чтобы достигнуть этого, достаточно всѣ члены перваго уравненія умножить на коэффиціентъ при y во второмъ уравненіи, т.-е. на 8, а всѣ члены второго уравненія умножить на коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи, т.-е. на 6:

$$\begin{array}{ll} 7x+6y=29 \text{ (на 8)} & \qquad 56x+\mathbf{48}y=232 \\ -5x+8y=10 \text{ (на 6)} & \qquad -30x+\mathbf{48}y=60 \end{array}$$

Такимъ образомъ, этотъ случай всегда можно привести къ первому. Послѣ этого остается только сложить или вычесть преобразованныя уравненія. Въ нашемъ примѣрѣ знаки передъ y въ обоихъ уравненіяхъ одинаковы, а потому для исключенія y надо уравненія почленно вычесть:

$$\begin{array}{r} 56x+48y=\ \ 232 \\ \mp 30x\pm 48y=-\ 60 \\ \hline 86x\qquad =\ \ 172 \end{array}\text{; откуда } x=2$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти или посредствомъ подстановки въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденнаго для него числа, или тѣмъ же путемъ, какъ нашли x.

Замѣчаніе. Чтобы коэффиціенты передъ y оказались не только *равными*, но и *наименьшими*, слѣдуетъ найти *наименьшее кратное* коэффиціентовъ y, т.-е. 6-и и 8-ми (это будетъ 24), раздѣлить его на каждый изъ этихъ коэффиціентовъ ($24:6=4$; $24:8=3$) и на полученныя частныя умножить соотвѣтственно всѣ члены данныхъ уравненій:

$$7x+6y=29 \text{ (на 4)} \qquad 28x+\mathbf{24}y=116$$
$$-5x+8y=10 \text{ (на 3)} \qquad -15x+\mathbf{24}y=30$$

Вычтя почленно уравненія, получимъ: $43x=86$, $x=2$.

Правило. *Чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвѣстное по способу сложенія или вычитанія, надо уравнять въ обоихъ уравненіяхъ коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, а потомъ сложить оба уравненія, если знаки передъ этимъ неизвѣстнымъ разные, или изъ одного уравненія вычесть почленно другое, если знаки передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ одинаковые.*

103. Основная теорема. Всѣ изложенные способы основываются на слѣдующей теоремѣ: *если въ системѣ двухъ уравненій одно изъ нихъ замѣнимъ уравненіемъ, которое получится отъ почленнаго сложенія или вычитанія данныхъ уравненій, то получимъ другую систему, равносильную данной (т.-е. имѣющую тѣ же корни).*

Пусть имѣемъ систему:

$$A=B \qquad A_1=B_1 \qquad [1]$$

Требуется доказать, что эта система равносильна такой:

$$A\pm A_1=B\pm B_1 \qquad A_1=B_1 \qquad [2]$$

Для доказательства допустимъ, что система [1] имѣетъ корни $x=a$, $y=b$. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ A дѣлается равнымъ B и A_1 равнымъ B_1. Въ такомъ случаѣ очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ $A \pm A_1$ дѣлается равнымъ $B \pm B_1$, т.-е. корни системы [1] удовлетворяютъ системѣ [2]. Положимъ теперь, что система [2] допускаетъ корни: $x=c$, $y=d$. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ $A \pm A_1$ дѣлается равнымъ $B \pm B_1$ и A_1 равнымъ B_1. Въ такомъ случаѣ очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ A сдѣлается равнымъ B, т.-е. корни системы [2] удовлетворяютъ системѣ [1]. Изъ этого слѣдуетъ, что системы эти равносильны.

Уравнявъ коэффиціенты при одномъ неизвѣстномъ и сложивъ или вычтя почленно оба уравненія, получимъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Взявъ его вмѣстѣ съ однимъ изъ данныхъ, получимъ систему, равносильную данной. Въ новой системѣ одно неизвѣстное опредѣляется прямо; подставивъ его величину во второе уравненіе, найдемъ другое неизвѣстное.

Способы сравненія и подстановки могутъ быть разсматриваемы, какъ слѣдствія изъ способа сложенія или вычитанія. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему: $2x-3y=1$ и $5x+7y=17$. Ее можно замѣнить другою:

$$x=\frac{1+3y}{2} \qquad x=\frac{17-7y}{5}$$

потому что уравненія послѣдней системы равносильны съ уравненіями первой. Вычтя почленно уравненія второй системы, мы можемъ, по доказанному, замѣнить ее такою:

$$x=\frac{1+3y}{2} \qquad 0=\frac{1+3y}{2}-\frac{17-7y}{5}$$

Эту послѣднюю систему можно представить двояко:

$$2x-3y=1 \qquad \frac{1+3y}{2}=\frac{17-7y}{5} \text{ (способъ сравненія)}$$

или: $$x=\frac{1+3y}{2} \qquad 5.\frac{1+3y}{2}+7y=17 \text{ (способъ подстановки).}$$

ГЛАВА V.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

104. Одно или два уравненія съ тремя неизвѣстными допускаютъ вообще безчисленное множество корней, потому что въ первомъ случаѣ двумъ неизвѣстнымъ, а во второмъ— одному неизвѣстному можно придавать *произвольныя* значенія, число которыхъ, очевидно, безконечно велико.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными вообще имѣетъ лишь одно рѣшеніе для каждаго неизвѣстнаго и рѣшается тѣми же способами, какіе указаны выше для системы двухъ уравненій. Покажемъ примѣненіе этихъ способовъ на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ 7x+4y-8z=3 \\ 5x-3y-4z=-12 \end{cases}$$

105. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія, напр. изъ перваго, опредѣлимъ какое-нибудь неизвѣстное, напр. x, въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ:

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}$$

Подставимъ это выраженіе въ остальныя уравненія:

$$7\left(\frac{7+2y-5z}{3}\right)+4y-8z=3$$

$$5\left(\frac{7+2y-5z}{3}\right)-3y-4z=-12$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными.

Рѣшивъ ихъ по какому-нибудь изъ способовъ, указанныхъ прежде, найдемъ: $y=3$, $z=2$; подставивъ эти величины въ формулу для x, выведенную раньше, найдемъ и это неизвѣстное:

$$x=\frac{7+2.3-5.2}{3}=1$$

106. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣлимъ одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ двухъ другихъ неизвѣстныхъ. Отъ этого получимъ 3 выраженія для одного и того же неизвѣстнаго. Соединивъ знакомъ = первое выраженіе со вторымъ и первое съ третьимъ (вообще, одно изъ этихъ выраженій съ каждымъ изъ остальныхъ), получимъ два уравненія съ 2 неизвѣстными:

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3-4y+8z}{7}=\frac{3y+4z-12}{5}$$

$$\frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3-4y+8z}{7};\quad \frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3y+4z-12}{5}$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ: $y=3$, $z=2$. Вставивъ эти значенія въ одну изъ трехъ формулъ, выведенныхъ раньше для x, найдемъ: $x=1$.

107. Способъ сложенія или вычитанія. Взявъ 1-е уравненіе со 2-мъ, исключимъ изъ нихъ какое-нибудь неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія; отъ этого получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Взявъ потомъ 1-е ур. съ 3-мъ (или 2-е съ 3-мъ), тѣмъ же способомъ исключимъ изъ нихъ *то же* неизвѣстное; отъ этого получимъ еще одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Пусть, напр., желаемъ исключить z:

1) $3x-2y+5z=7$	(на 8)	$24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$	(на 5)	$35x+20y-40z=15$
		$59x+4y=71$
1) $3x-2y+5z=7$	(на 4)	$12x-8y+20z=28$
3) $5x-3y-4z=-12$	(на 5)	$25x-15y-20z=-60$
		$37x-23y=-32$

Рѣшивъ полученныя два уравненія, найдемъ: $x=1$, $y=3$. Вставивъ эти числа въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ первое, получимъ:

$$3.1-2.3+5z=7;\ 5z=10;\ z=2.$$

Замѣчаніе. Для исключенія одного неизвѣстнаго мы брали въ этомъ примѣрѣ 1-е уравненіе со 2-мъ, потомъ 1-е съ 3-мъ; но нѣтъ надобности держаться такого порядка. Можно взять 1-е ур. со 2-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ; или 1-е съ 3-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ,—однимъ словомъ, надо взять *какое-нибудь изъ трехъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ*.

ГЛАВА VI.

Система уравненій со многими неизвѣстными.

108. Общее замѣчаніе. Рѣшеніе системы n ур. съ n неизвѣстными состоитъ въ томъ, что посредствомъ исключенія одного неизвѣстнаго приводятъ эту систему къ другой, въ которой однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше; изъ этой системы снова исключаютъ одно неизвѣстное, отчего получаютъ еще однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше. Продолжаютъ такое послѣдовательное исключеніе до тѣхъ поръ, пока не получатъ одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

109. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія опредѣляютъ какое-нибудь неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ; полученное выраженіе вставляютъ вмѣсто исключаемаго неизвѣстнаго въ остальныя уравненія. Отъ этого получаютъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системой поступаютъ точно такъ же. Продолжаютъ исключеніе неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, находятъ значеніе этого неизвѣстнаго. Вставивъ это значеніе въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключали въ послѣдній разъ, получаютъ значеніе другого неизвѣстнаго. Вставивъ эти два значенія въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключали въ предпослѣдній разъ, находятъ значеніе третьяго неизвѣстнаго. Продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ получены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

110. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣляютъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ остальныхъ. Получаютъ такимъ образомъ для одного и того же неизвѣстнаго столько выраженій, сколько уравненій, положимъ n. Соединивъ знакомъ = одно изъ этихъ выраженій со всѣми остальными, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно такъ же.

Замѣчаніе. Нѣтъ надобности соединять знакомъ = непремѣнно *одно и то же выраженіе* со всѣми остальными; можно, напр., 1-е выраженіе соединить со 2-мъ, 2-е съ 3-мъ, 3-е съ 4-мъ и т. д., или какъ-нибудь иначе; надо лишь заботиться о томъ, чтобы всѣ $n-1$ равенствъ были независимы одно отъ другого.

111 Способъ сложенія или вычитанія. Берутъ два уравненія, напр. первое и второе, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія (конечно, уравнявъ предварительно коэффиціенты передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ). Отъ этого получаютъ одно уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Потомъ берутъ одно изъ взятыхъ прежде уравненій, напр. второе, вмѣстѣ съ какимъ-нибудь изъ остальныхъ, напр. съ третьимъ, и тѣмъ же способомъ исключаютъ изъ нихъ *то же* неизвѣстное; отъ этого получаютъ другое уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Затѣмъ берутъ одно изъ ранѣе взятыхъ уравненій, напр. третье, вмѣстѣ съ однимъ изъ осталь-

ныхъ, напр. съ четвертымъ, и исключаютъ изъ нихъ *то же* самое неизвѣстное; отъ этого получаютъ третье уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Перебравъ такимъ образомъ всѣ n уравненій, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этой системой можно поступать точно такъ же, какъ и съ первой.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторые частные случаи системъ уравненій.

112. Разсмотримъ нѣкоторые случаи, когда при рѣшеніи системы уравненій полезно отступать отъ общихъ пріемовъ.

I. *Случай, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе;* напр.:

$$\begin{cases} 10x-y+3z=5 \\ 4v-5x=6 \\ 2y+3z=6 \\ 3y+2v=4 \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ система рѣшается быстрѣе, чѣмъ обыкновенно, такъ какъ въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ сами собой исключены тѣ или другія неизвѣстныя. Надо только сообразить, какія неизвѣстныя изъ какихъ уравненій слѣдуетъ исключить, чтобы возможно быстрѣе дойти до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Исключивъ въ нашемъ примѣрѣ z изъ 1-го и 3-го ур. и v изъ 2-го и 4-го, получимъ два уравненія съ x и y:

$$\begin{array}{r} 10x-y+3z=5 \\ -2y-3z=-6 \\ \hline 10x-3y=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4v-5x=6 \\ -4v-6y=-8 \\ \hline -5x-6y=-2 \end{array}$$

Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ $x=0$, $y={}^1/_3$.

Вставивъ эти значенія во 2-е и 3-е уравненія, получимъ: $v={}^3/_2$, $z={}^{16}/_9$.

II. *Случай, когда неизвѣстныя входятъ въ уравненія подъ видомъ дробей:* ${}^1/_x$, ${}^1/_y$, ${}^1/_z$... Напр.:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{5}{6}. \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \text{Положимъ, что:} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}=a \\ \dfrac{1}{y}=b \\ \dfrac{1}{z}=c \end{cases}$$

Тогда получимъ три уравненія съ вспомогательными неизвѣстными a, b и c:

$$\begin{cases} a+b-c=\frac{7}{6} \\ a-b-c=-\frac{5}{6} \\ b-a-c=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=\frac{1}{3}$ т.-е. $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=1$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$

Откуда: $x=2$, $y=1$, $z=3$.

$$2)\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. п. можно разсматривать, какъ произведенія $3\,.\,\frac{1}{x}$, $2\,.\,\frac{1}{y}$ и т. д.

Поэтому, положивъ $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$ и $\frac{1}{z}=c$, получимъ:

$$\begin{cases} 3a+2b-4c=-13 \\ 6a-3b-c=5\frac{1}{2} \\ -5a+7b+2c=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ: $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=5$, послѣ чего получимъ: $x=\frac{1}{2}$, $y=2$, $z=\frac{1}{5}$

III. *Сложеніе и вычитаніе уравненій.* Напр.:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

Сложивъ всѣ три уравненія, найдемъ сумму трехъ неизвѣстныхъ; вычитая изъ этой суммы каждое уравненіе, найдемъ неизвѣстныя отдѣльно:

$$2(x+y+z)=a+b+c;\ x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$$

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\ \ x=\frac{a+b+c}{2}-b;\ \ y=\frac{a+b+c}{2}-c$$

ГЛАВА VIII.

Способъ неопредѣленныхъ множителей.

(Способъ Безу).

113. Два уравненія съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ:

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c' \qquad [1]$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., второго, на нѣкотораго множителя m и затѣмъ сложимъ его съ другимъ уравненіемъ:

$$(a+a'm)x+(b+b'm)y=c+c'm \qquad [2]$$

Желая опредѣлить изъ этого уравненія x, придадимъ множителю m такое значеніе, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ нуль. Для этого надо для m назначить величину, опредѣляемую уравненіемъ:

$$b+b'm=0, \text{ откуда: } m=-\frac{b}{b'}$$

Тогда уравненіе [2] даетъ:

$$(a+a'm)x=c+c'm, \qquad \text{откуда: } x=\frac{c+c'm}{a+a'm}$$

Вставивъ на мѣсто m его значеніе $-\frac{b}{b'}$, получимъ:

$$x=\frac{c+c'\left(-\frac{b}{b'}\right)}{a+a'\left(-\frac{b}{b'}\right)}=\frac{c-\frac{c'b}{b'}}{a-\frac{a'b}{b'}}=\frac{\frac{cb'-c'b}{b'}}{\frac{ab'-a'b}{b'}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$$

Для опредѣленія y дадимъ m такое значеніе, которое въ ур. [2] обратить въ нуль коэффиціентъ при x, т.-е. положимъ, что:

$$a+a'm=0, \qquad \text{откуда: } m=-\frac{a}{a'}$$

Тогда $(b+b'm)\,y=c+c'm$, откуда:

$$y=\frac{c+c'm}{b+b'm}=\frac{c+c'\left(-\frac{a}{a'}\right)}{b+b'\left(-\frac{a}{a'}\right)}=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

114. Способъ составленія окончательныхъ формулъ. Полезно замѣтить, какъ можно составить окончательныя формулы для неизвѣстныхъ, не прибѣгая каждый разъ къ ихъ выводу. Знаменатель $ab'-a'b$, одинаковый для обѣихъ формулъ, составленъ изъ коэффиціентовъ:

$$\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$$

перемноженіемъ ихъ крестъ-накрестъ, причемъ одно произведеніе взято съ $+$, другое съ $-$. Числители формулъ получаются изъ знаменателя замѣною въ немъ коэффиціентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго соотвѣтственно свободными членами c и c'. Чтобы получить, напр., числителя формулы x, надо въ знаменателѣ $ab'-a'b$ замѣнить *иксовы* коэффиціенты a и a' соотвѣтственно на c и c', отъ этого получимъ: $cb'-c'b$.

115. Три уравненія съ 3 неизвѣстными. Пусть имѣемъ систему трехъ уравненій:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \quad [1]$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., перваго, на неопредѣленнаго множителя m, а всѣ члены другого уравненія, напр., второго, на неопредѣленнаго множителя n и затѣмъ сложимъ всѣ три уравненія:

$$(am+a'n+a'')x+(bm+b'n+b'')y+(cm+c'n+c'')z=dm+dn+d'' \quad [2]$$

Желая опредѣлить x, выберемъ для m и n такія значенія, чтобы въ послѣднемъ уравненіи коэффиціенты при y и z обратились въ нули. Такія значенія найдутся, если рѣшимъ уравненія:

$$\begin{cases} bm+b'n+b''=0 \\ cm+c'n+c''=0 \end{cases} \quad [3]$$

Тогда уравненіе [2] дастъ

$$x=\frac{dm+d'n+d''}{am+a'n+a''} \quad [4]$$

Отсюда видно, что x найдется, если рѣшимъ систему [3] относительно m и n. Такимъ образомъ, рѣшеніе системы трехъ уравненій съ 3 неизв. приводится къ рѣшенію системы двухъ уравненій 2 неизв.

Перенеся въ уравненіяхъ [3] члены b'' и c'' въ правую часть и пользуясь формулами § 114, получимъ:

$$m=\frac{(-b'')c'-b'(-c'')}{bc'-b'c}=\frac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}$$

$$n=\frac{b(-c'')-(-b'')c}{bc'-b'c}=\frac{b''c-bc''}{bc'-b'c}$$

Подставивъ эти величины въ равенство [4], находимъ:

$$x=\frac{d\left(\frac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}\right)+d'\left(\frac{b''c-bc''}{bc'-b'c}\right)+d''}{a\left(\frac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}\right)+a'\left(\frac{b''c-bc''}{bc'-b'c}\right)+a''}$$

Раскроемъ скобки и умножимъ числителя и знаменателя на $bc'-b'c$:

$$x=\frac{db'c''-db''c'+d'b''c-d'bc''+d''bc'-d''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

Остальныя неизвѣстныя можно найти тѣмъ же способомъ, а именно для опредѣленія y надо m и n выбрать такими, чтобы:

$$\begin{cases} am+a'n+a''=0 \\ cm+c'n+c''=0 \end{cases} \quad \text{тогда } y=\frac{dm+d'n+d''}{bm+b'n+b''}$$

Для опредѣленія z надо рѣшить систему:

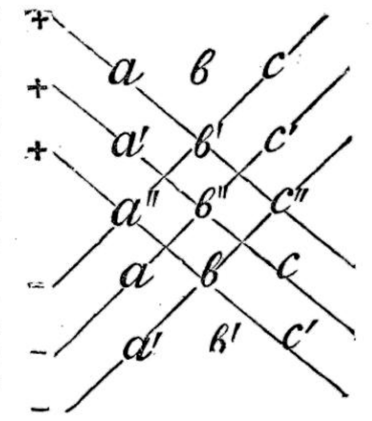
$$\begin{cases} am+a'n+a''=0 \\ bm+b'n+b''=0 \end{cases} \quad z=\frac{dm+d'n+d''}{cm+c'n+c''}$$

Выполнивъ это, получимъ:

$$y=\frac{da'c''-da''c'+d'a''c-d'ac''+d''ac'-d''a'c}{ba'c''-ba''c'+b'a''c-b'ac''+b''ac'-b''a'c}$$

$$z=\frac{da'b''-da''b'+d'a''b-d'ab''+d''ab'-d''a'b}{ca'b''-ca''b'+c'a''b-c'ab''+c''ab'-c''a'b}$$

116. Способъ составленія окончательныхъ формулъ. Разсматривая знаменателей трехъ формулъ, выведенныхъ для x, y и z, замѣчаемъ, что они представляютъ собою одинъ и тотъ же многочленъ (въ формулѣ для y надо предварительно умножить числителя и знаменателя на -1). Чтобы составить этотъ многочленъ, расположимъ коэффиціенты: a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' въ три горизонтальныя строки другъ подъ другомъ, а затѣмъ повторимъ еще 1-ю и 2-ю строку; тогда получимъ всего 5 горизонтальныхъ строкъ (см. черт. рядомъ).



Затѣмъ перемножимъ числа по діагоналямъ, указаннымъ на чертежѣ, беря три произведенія: $ab'c''$, $a'b''c$, $a''bc'$ со знакомъ $+$, а остальныя три, а именно: $a''b'c$, $ab''c'$ и $a'bc''$, со знакомъ $-$.

Соединивъ эти шесть произведеній въ одинъ многочленъ, получимъ знаменателя формулъ для x, y и z. Для полученія числителя x замѣнимъ въ

нашихъ 5-ти строчкахъ *иксовы* коэффиціенты, т.-е. a, a', a'', a и a', на соотвѣтствующіе свободные члены: d, d', d'', d, d' и составимъ по тому же правилу шесть произведеній. Для полученія числителей y и z замѣнимъ въ строчкахъ свободными членами *игрековы*, а потомъ *зетовы* коэффиціенты.

117. n уравненій съ n неизвѣстными. Пусть вообще имѣемъ n уравненій 1-й ст. съ n неизвѣстными. Умножимъ какія-нибудь $n-1$ уравненій соотвѣтственно на $n-1$ неопредѣленныхъ множителей: m_1, m_2, $m_3 \ldots m_{n-1}$ и затѣмъ сложимъ всѣ уравненія. Отъ этого получимъ одно уравненіе съ n неизвѣстными. Желая затѣмъ опредѣлить какое-нибудь неизвѣстное, напр. x, придадимъ неопредѣленнымъ множителямъ такія значенія, чтобы коэффиціенты при всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ обратились въ нули. Для этого придется рѣшить $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Эту систему, въ свою очередь, можемъ привести къ системѣ $n-2$ ур. съ $n-2$ неизвѣстными и т. д.

118. Замѣчаніе. Рѣшая численныя уравненія по способу Безу, мы можемъ иногда встрѣтиться съ затрудненіемъ, сущность котораго уяснится на слѣдующемъ примѣрѣ. Пусть мы рѣшаемъ систему уравненій:

$$\left\{\begin{aligned} 5x+2y+4z&=21 \\ x+4y+8z&=33 \\ 3x+2y-z&=4 \end{aligned}\right.$$

способомъ неопредѣленныхъ множителей. Умноживъ первое уравненіе на m, второе на n и сложивъ три уравненія, получимъ:

$$(5m+n+3)x+(2m+4n+2)y+(4m+8n-1)z=21m+33n+4$$

Желая найти x, положимъ, что:

$$2m+4n+2=0 \qquad \text{и} \qquad 4m+8n-1=0$$

Рѣшая эти два уравненія, находимъ, что они *несовмѣстны*, т.-е. не существуетъ такихъ значеній для m и n, при которыхъ коэффиціенты y и z обращались бы въ нули. Въ этомъ и состоитъ возможное иногда затрудненіе.

Встрѣтивъ такое обстоятельство, мы не должны еще заключать, что и данная система невозможна; такъ, въ нашемъ примѣрѣ существуетъ рѣшеніе $x=1$, $y=2$, $z=3$, которое мы можемъ получить или посредствомъ окончательныхъ формулъ, выведенныхъ выше, или же помощью одного изъ извѣстныхъ требъ способовъ рѣшенія системы уравненій *).

---

*) Указаннаго затрудненія можно также избѣжать умноженіемъ *каждаго* изъ данныхъ уравненій на неопредѣленнаго множителя (подробности объ этомъ см. *Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ*, составилъ *Н. Билибинъ*, изданіе третье, стр. 284, и слѣд.).

ГЛАВА IX.

Уравненія неопредѣленныя, несовмѣстныя и условныя.

119. Система, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, допускаетъ вообще безчисленное множество рѣшеній. Пусть, напр., имѣемъ 3 уравненія съ 5-ю неизвѣстными: x, y, z, t и v. Назначивъ для 2 неизвѣстныхъ, напр., для x и y, произвольныя числа и подставивъ ихъ въ данныя уравненія, получимъ 3 уравненія съ тремя неизвѣстными z, t и v; рѣшивъ ихъ, найдемъ значенія этихъ неизвѣстныхъ, соотвѣтствующія взятымъ числамъ для x и y. Назначивъ какія-нибудь другія числа для x и y, снова найдемъ соотвѣтствующія значенія для остальныхъ неизвѣстныхъ. Такимъ образомъ, каждой парѣ произвольно выбранныхъ значеній для x и y найдемъ соотвѣтствующія значенія остальныхъ трехъ неизвѣстныхъ; значитъ, всѣхъ рѣшеній можетъ быть безчисленное множество. Система, допускающая безчисленное множество рѣшеній, наз. *неопредѣленною*.

120. Система, въ которой число уравненій больше числа неизвѣстныхъ, можетъ имѣть рѣшеніе лишь при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненій. Положимъ, напр., имѣемъ систему 7-ми ур. съ 4 неизвѣстными. Взявъ изъ всѣхъ уравненій какихъ-нибудь 4 и рѣшивъ ихъ, найдемъ значенія для всѣхъ 4 неизвѣстныхъ. Подставивъ эти значенія въ остальныя 3 уравненія, получимъ 3 равенства, которыя могутъ оказаться невозможными. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія *несовмѣстны*.

Примѣры:

1) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 7x+4y=59 \\ 6x-3y=10 \end{cases}$ Рѣшивъ два первыя уравненія, найдемъ: $x=5$, $y=6$. Вставивъ эти значенія въ 3-е уравненіе, получимъ невозможное равенство: $12=10$; значитъ, данныя уравненія несовмѣстны.

2) $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \\ qx+ry=s \end{cases}$ Изъ двухъ первыхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{cn-bp}{an-bm}, \quad y=\frac{ap-cm}{an-bm}$$

Вставивъ эти формулы въ третье уравненіе, получимъ слѣдующую зависимость между коэффиціентами:

$$\frac{cn-bp}{an-bm}q+\frac{ap-cm}{an-bm}r=s$$

Если коэффиціенты таковы, что удовлетворяютъ этой зависимости, то система возможна; въ противномъ случаѣ уравненія несовмѣстны.

Равенства, которымъ должны удовлетворять буквенные коэффиціенты данныхъ уравненій для того, чтобы система могла имѣть рѣшеніе, называются *условными* уравненіями (для этой системы).

121. Иногда система можетъ оказаться невозможной или неопредѣленной и тогда, когда въ ней число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, а именно: система невозможна, если одно или нѣсколько уравненій *противорѣчатъ* остальнымъ, и неопредѣленна, если одно или нѣсколько уравненій представляютъ *слѣдствіе* остальныхъ.

Примѣры:

1) $\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 4x-6y=20 \end{cases}$ Второе уравненіе противорѣчитъ первому: лѣвая часть 2-го уравненія въ два раза больше лѣвой части 1-го, а правая хотя и больше, но не въ два раза. Если станемъ рѣшать эти уравненія, то невозможность обнаружится тѣмъ, что получимъ нелѣпое равенство.

2) $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 5x+2y-4z=-1 \\ 9x-4y-2z=9 \end{cases}$ Третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ. Въ самомъ дѣлѣ, если члены перваго уравненія умножимъ на 2, потомъ сложимъ его со вторымъ уравненіемъ, то получимъ третье уравненіе; слѣд., если два первыя уравненія удовлетворяются какими-нибудь значеніями неизвѣстныхъ, то тѣми же значеніями удовлетворяется и третье уравненіе. Но первыя два уравненія, содержа три неизвѣстныя, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній; значитъ, система неопредѣленна.

Если станемъ рѣшать эти уравненія, то неопредѣленность обнаружится тѣмъ, что въ концѣ рѣшенія всѣ неизвѣстныя исключаются и получится равенство: 0=0.

ГЛАВА X.

Изслѣдованіе уравненій первой степени.

Одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

122. Что значитъ изслѣдовать уравненіе. Изслѣдовать уравненіе съ буквенными коэффиціентами значитъ разсмотрѣть всѣ особенные случаи, которые могутъ представиться при рѣшеніи его, въ зависимости отъ частныхъ значеній буквъ, и уяснить значеніе этихъ случаевъ для той задачи, изъ условій которой уравненіе выведено.

123. Общій видъ уравненія. Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ послѣ раскрытія въ немъ скобокъ, уничтоженія знаменателей и приведенія подобныхъ членовъ въ каждой его части отдѣльно, всегда приведется къ такому виду, при которомъ лѣвая и правая части уравненія будутъ состоять, каждая, не болѣе какъ изъ двухъ членовъ: члена, содержащаго неизвѣстное въ 1-й степени, и члена, не содержащаго неизвѣстнаго. Что касается знаковъ передъ этими членами, то могутъ представиться различные случаи. Условія, принятыя въ алгебрѣ относительно отрицательныхъ чиселъ, позволяютъ выразить всѣ эти случаи однимъ *общимъ* уравненіемъ:

$$ax+b=a_1x+b_1$$

если подъ буквами a, b, a_1, b_1 будемъ разумѣть числа не только положительныя, но и отрицательныя и даже равныя нулю. Полагая, напр., $a=3$, $b=-2$, $a_1=0$ и $b_1=10$, получимъ изъ общаго уравненія слѣдующій частный случай:

$$3x+(-2)=0.\ x+10, \text{ т.-е. } 3x-2=10$$

124. Рѣшеніе уравненія. Перенеся члены, содержащіе x, въ одну часть уравненія, а извѣстные члены въ другую (причемъ условія объ отрицательныхъ числахъ позволяютъ не стѣсняться невозможнымъ вычитаніемъ), получимъ:

$$ax-a_1x=b_1-b \text{ или: } (a-a_1)x=b_1-b$$

Откуда:

$$x=\frac{b_1-b}{a-a_1}$$

Разсмотримъ теперь, какого рода рѣшенія получаются изъ этой общей формулы при частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нее буквъ.

125. Положительное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда разности b_1-b и $a-a_1$ обѣ положительны, или обѣ отрицательны.

Положительное рѣшеніе вообще показываетъ, что предложенная задача возможна. Впрочемъ, иногда случается, что *не всѣ* условія задачи выражены въ уравненіи; въ этомъ случаѣ положительное рѣшеніе можетъ и не удовлетворить требованіямъ задачи и задача окажется невозможной. Приведемъ этому примѣръ.

Задача. Общество, состоящее изъ 20 человѣкъ, устроило сборъ съ благотворительной цѣлью, причемъ каждый мужчина внесъ по 3 рубля, а каждая женщина—по 1 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если весь сборъ составилъ 55 руб.?

Искомое число мужчинъ x; число женщинъ $20-x$; сборъ со всѣхъ мужчинъ $3x$, съ женщинъ $20-x$; по условію задачи:

$$3x+(20-x)=55; \text{ откуда: } x=17^1/_2$$

Это рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, но не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ по смыслу ея искомое число должно быть цѣлымъ. Различіе между уравненіемъ и задачею произошло здѣсь оттого, что уравненіе выражаетъ *не всѣ* требованія задачи, а именно: въ немъ не содержится подразумѣваемаго въ задачѣ требованія, чтобы искомое число было *цѣлое*. Предложенная задача невозможна.

126. Отрицательное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда одна изъ разностей: b_1-b и $a-a_1$ положительна, а другая отрицательна.

Чтобы показать, какое значеніе имѣетъ отрицательное рѣшеніе для задачи, докажемъ предварительно слѣдующую теорему.

Теорема. *Если данное уравненіе имѣетъ отрицательный корень, то абсолютная величина этого корня удовлетворяетъ другому уравненію, которое получится изъ даннаго замѣною въ немъ* **x** *на* **—x.**

Пусть данное уравненіе

$$ax+b=a_1x+b_1 \quad [1]$$

имѣетъ отрицательный корень $x=-m$; требуется доказать, что абсолютная величина этого корня, т.-е. число m, удовлетворяетъ другому уравненію

$$a(-x)+b=a_1(-x)+b_1$$

$$\text{т.-е.} \quad -ax+b=-a_1x+b_1 \quad [2]$$

которое получается изъ даннаго замѣною въ немъ x на $-x$.

Для доказательства подставимъ въ уравненіе [2] на мѣсто x число m:

$$-am+b=-a_1m+b_1 \quad [3]$$

Равенство это должно оказаться *тождествомъ*, такъ какъ оно получается и тогда, когда въ уравненіе [1] на мѣсто x подставимъ число $-m$, которое, по условію, есть корень ур. [1]. Если же равенство [3] есть тождество и оно получается изъ ур. [2] замѣною въ немъ x на m, то это значитъ, что $x=m$ есть корень уравненія [2].

Основываясь на этой теоремѣ, можемъ поступить такъ: получивъ отрицательное рѣшеніе $-m$, измѣнимъ въ уравненіи x на $-x$; отъ этого получимъ новое уравненіе, которое имѣетъ положительное рѣшеніе $x=m$. Новое уравненіе, конечно, не соотвѣтствуетъ предложенной задачѣ; всматриваясь въ него, мы легко опредѣлимъ, какъ надо измѣнить задачу, чтобы она соотвѣтствовала этому новому уравненію и, слѣд., имѣла бы положительное рѣшеніе $x=m$. При этомъ, какъ увидимъ изъ прилагаемыхъ ниже задачъ, приходится измѣнить или *предположеніе*, которое мы сдѣлали при составленіи уравненія, или *вопросъ* задачи, или ея *условія*; причемъ *предположеніе, вопросъ или условія приходится измѣнять въ смыслѣ обратномъ тому, какой они имѣютъ при положительномъ рѣшеніи*; такъ, если положительное рѣшеніе означаетъ время *послѣ* нѣкотораго событія, то отрицательное означаетъ время *раньше* этого событія; если первое означаетъ разстояніе *вправо*, то послѣднее—разстояніе *влѣво* отъ нѣкоторой точки и т. п.

Задача 1. Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N (см. чертежъ на слѣд. стран.); въ каждый часъ одинъ курьеръ проѣзжаетъ 15 верстъ, другой 12 верстъ. Перваго

замѣтили на станціи A въ 12 часовъ дня, а второго видѣли въ 2 часа того же дня на станціи B, отстоящей отъ A на 25 верстъ. Опредѣлить мѣсто встрѣчи двухъ курьеровъ.

Изъ условій задачи прямо не видно, гдѣ произошла встрѣча: налѣво отъ A, или между A и B, или направо отъ B. *Предположимъ*, что курьеры встрѣтились направо отъ B

M C₂ A C₁ x B x C N

въ нѣкоторой точкѣ C, отстоящей отъ B на x верстъ. Первому курьеру отъ A до C пришлось проѣхать $25+x$ верстъ, на что ему понадобилось $\frac{25+x}{15}$ часовъ. Второму курьеру отъ B до C пришлось проѣхать x вер., на что ему понадобилось $\frac{x}{12}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что число часовъ, въ теченіе которыхъ первый курьеръ проѣхалъ отъ A до C, больше числа часовъ, употребленныхъ вторымъ курьеромъ на проѣздъ отъ B до C, на 2; поэтому

$$\frac{25+x}{15}-\frac{x}{12}=2 \qquad [1]$$

откуда: $100+4x-5x=120;\ -x=20;\ x=-20$

Чтобы найти смыслъ этого отрицательнаго рѣшенія, измѣнимъ въ уравненіи x на $-x$:

$$\frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2 \qquad [2]$$

Это уравненіе имѣетъ положительное рѣшеніе: $x=20$.

Не трудно видѣть, что оно соотвѣтствуетъ той же задачѣ, только иному *предположенію*. Дѣйствительно, допустимъ, что курьеры встрѣтились въ нѣкоторой точкѣ C_1, лежащей между A и B, на разстояніи x верстъ отъ B. Тогда первый курьеръ проѣхалъ пространство отъ A до C_1, т.-е. $25-x$ верстъ, въ $\frac{25-x}{15}$ часовъ, а второй курьеръ проѣхалъ путь отъ C_1 до B, т.-е. x верстъ, въ $\frac{x}{12}$ часовъ; такъ какъ пер-

вый выѣхалъ изъ A въ полдень, а второй пріѣхалъ въ B въ 2 часа того же дня, то

$$\frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2$$

а это и есть уравненіе [2]. Итакъ, задача наша получаетъ такой отвѣтъ: курьеры встрѣтились за 20 верстъ до станціи B.

Задача 2. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 10 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?

Обозначимъ искомое число черезъ x. Черезъ x лѣтъ отцу будетъ $40+x$, а сыну $10+x$ лѣтъ. По условію:

$$40+x=7(10+x); \qquad \text{откуда: } x=-5$$

Замѣнивъ въ уравненіи x на $-x$, получимъ новое уравненіе $40-x=7(10-x)$, которое отвѣчаетъ той же задачѣ, но съ измѣненнымъ вопросомъ; а именно вопросъ долженъ быть такой: *сколько лѣтъ тому назадъ* отецъ былъ въ 7 разъ старше сына?

Задача 3. Въ двухъ кошелькахъ было 100 руб. Вынувъ изъ одного $1/2$, а изъ другого $1/3$ денегъ, находившихся въ нихъ, замѣтили, что въ обоихъ осталось 70 руб. Сколько было денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

Въ первомъ кошелькѣ денегъ x руб.; въ другомъ $100-x$ руб. Когда изъ перваго вынули $1/2$ его денегъ, то въ немъ осталось $1/2x$; когда изъ другого вынули $1/3$ его денегъ, то въ немъ осталось $2/3$ $(100-x)$; по условію

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(100-x)=70$$

$$3x+400-4x=420; \text{ откуда: } -x=20; \ x=-20$$

Перемѣнимъ въ данномъ уравненіи x на $-x$:

$$-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(100+x)=70 \text{ или: } \frac{2}{3}(100+x)-\frac{1}{2}x=70$$

Это уравненіе соотвѣтствуетъ такой задачѣ съ измѣненными условіями: въ двухъ кошелькахъ было нѣкоторое количество денегъ, причемъ во второмъ было болѣе, чѣмъ въ первомъ, на 100 руб. Вынувъ изъ 1-го кошелька $1/2$, а

изъ 2-го $^1/_3$ находившихся въ нихъ денегъ, замѣтили, что въ первомъ осталось менѣе, чѣмъ во второмъ, на 70 руб. Сколько было денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

127. Нулевое рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b_1-b}{a-a_1}$ число b_1 сдѣлается равнымъ b, причемъ a не равно a_1, то x принимаетъ видъ $\frac{0}{m}$, что, по опредѣленію дѣленія, должно равняться 0. Дѣйствительно, уравненіе, при этихъ предположеніяхъ, не можетъ имѣть никакого иного корня, кромѣ $x=0$, такъ какъ при $b=b_1$, оно обращается въ равенство: $ax=a_1x$, которое, при неравныхъ a и a_1, возможно только тогда, когда $x=0$.

Нулевое рѣшеніе въ нѣкоторыхъ случаяхъ даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи, иногда же показываетъ невозможность ея.

Задача 1. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 4 раза старше сына?

$$40+x=(10+x)4$$

откуда: $3x=0$ $x=\frac{0}{3}=0$

Это рѣшеніе даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ задачи: „въ настоящее время отецъ въ 4 раза старше сына“.

Задача 2. Найти знаменателя дроби, имѣющей числителемъ 3, при томъ условіи, чтобы произведеніе этой дроби на обратную ей равнялось 2.

Обозначивъ знаменателя дроби черезъ x, получимъ:

$$\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{3}=2;\ 3x=6x;\ x=0.$$

Въ этомъ примѣрѣ нулевое рѣшеніе показываетъ невозможность задачи, потому что дробь $^3/_0$ невозможна.

128. Безконечное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b_1-b}{a-a_1}$ знаменатель обратится въ нуль, а числитель въ какое-нибудь число m, не равное 0, то x представится подъ видомъ $\frac{m}{0}$. Въ этомъ случаѣ уравненіе не удовлетворяется никакимъ

числомъ, потому что, при $a=a_1$, оно при всякомъ значенiи x принимаетъ видъ равенства $b=b_1$, которое невозможно, если $b\neq b$. Невозможность удовлетворить уравненiю, конечно, означаетъ *невозможность задачи*, изъ условiй которой выведено это уравненiе.

Однако недостаточно сказать, что задача въ этомъ случаѣ невозможна. Можно предложить при этомъ вопросъ: какiя значенiя будетъ получать неизвѣстное, если измѣнимъ условiя задачи такъ, чтобы знаменатель дроби, выведенной для x, не равнялся нулю, а только уменьшался бы, приближаясь къ нулю? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, посмотримъ, какъ будетъ измѣняться величина дроби, если знаменателя ея станемъ уменьшать неопредѣленно, а числителя оставимъ безъ перемѣны (или будемъ измѣнять, но такъ, чтобы онъ оставался всегда *больше* какого-нибудь постояннаго числа).

Положимъ, что въ дроби $\frac{p}{q}$ знаменатель принимаетъ все меньшiя и меньшiя значенiя, напр., такiя: $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ и т. д. Тогда дробь получаетъ все большiя и большiя значенiя:

$$\frac{p}{^1/_{10}}=10p;\ \frac{p}{^1/_{100}}=100p;\ \frac{p}{^1/_{1000}}=1000\ p \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что если только p больше какого-нибудь постояннаго, хотя бы и очень малаго, числа, то дробь $^p/_q$, при неопредѣленномъ уменьшенiи ея знаменателя, можетъ превзойти какое угодно большое число.

Это свойство дроби сокращенно выражаютъ такъ: *дробь, у которой знаменатель равенъ 0, а числитель не равенъ 0, равна безконечности.*

Фразу эту нельзя понимать буквально, такъ какъ *дробь перестаетъ существовать*, когда у нея знаменатель обратится въ 0; фраза выражаетъ только то, что *дробь безпредѣльно увеличивается, если ея знаменатель уменьшается, приближаясь какъ угодно близко къ нулю, а числитель или не измѣняется вовсе, или при своемъ измѣненiи остается всегда больше какого-нибудь постояннаго числа.*

Свойство это письменно выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0}=\infty$$

гдѣ знакъ ∞ обозначаетъ собою безконечность.

Если знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ одинаковый знакъ съ числителемъ, то дробь, увеличиваясь безпредѣльно, все время остается положительной; если же знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ знакъ, обратный знаку числителя, то дробь все время отрицательна, а обсолютная величина ея увеличивается безпредѣльно. Письменно

это выражаютъ такъ: $$\frac{a}{0}=\pm\infty$$

Изъ свойства дроби находимъ также, что $\frac{a}{\pm\infty}=0$, т.-е *если абсолютная величина знаменателя возрастаетъ безпредѣльно, а числитель остается постояннымъ* *), *то дробь приближается какъ угодно близко къ нулю.*

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *безконечное рѣшеніе не только означаетъ невозможность задачи, но вмѣстѣ съ тѣмъ и показываетъ, что, по мѣрѣ приближенія къ нулю знаменателя дроби, выведенной для x, значеніе x безпредѣльно увеличивается.*

Задача. Къ двумъ окружностямъ, у которыхъ радіусы суть r и r_1 и разстояніе между центрами d, проведена общая внѣшняя касательная AB (см. черт. на слѣд. стр.). Опредѣлить точку пересѣченія касательной съ линіей центровъ.

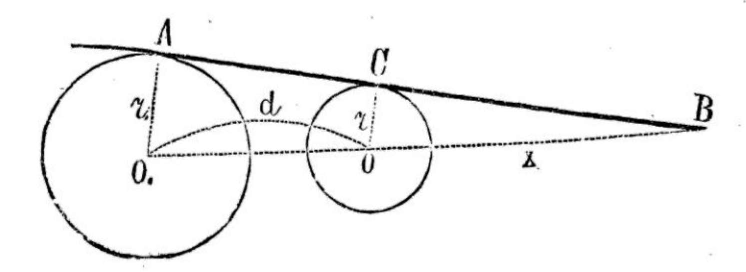
Обозначимъ черезъ x разстояніе точки пересѣченія до центра ближайшаго круга. Проведя изъ центровъ радіусы къ точкамъ касанія, получимъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника OCB и O_1AB, изъ которыхъ имѣемъ:

$$x:(d+x)=r:r_1;\quad r_1x=dr+rx;$$

$$r_1x-rx=dr;\quad x=\frac{dr}{r_1-r}$$

*) Или хотя и измѣняется, но такъ, что онъ остается меньше нѣкотораго постояннаго числа.

Если предположимъ, что разность радіусовъ данныхъ круговъ уменьшается, приближаясь къ нулю, то дробь $\frac{dr}{r_1 - r}$ будетъ безпредѣльно увеличиваться, т.-е. точка пересѣченія будетъ все далѣе и далѣе отходить отъ центра ближайшаго



круга, и общая касательная AB будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ параллельности съ линіей центровъ; если r_1 сдѣлается вполнѣ равнымъ r, то точки пересѣченія совсѣмъ не будетъ; другими словами, общая касательная будетъ въ этомъ случаѣ параллельна линіи центровъ.

129. Замѣчаніе. Уравненіе можетъ получить рѣшеніе $x = \infty$ въ двухъ существенно различныхъ случаяхъ, смотря по тому, будутъ ли коэффеціенты уравненія величины *перемѣнныя* или *постоянныя*.

Въ первомъ случаѣ уравненіе получаетъ безконечное рѣшеніе тогда, когда въ дроби, выведенной изъ уравненія для величины неизвѣстнаго, при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ, числитель обращается въ конечное число, а знаменатель въ нуль (какъ это было въ задачѣ, разсмотрѣнной выше). Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, рѣшеніе $x = \infty$ означаетъ только то, что величина неизвѣстнаго безпредѣльно увеличивается по мѣрѣ того, какъ знаменатель приближается къ нулю. Подобнаго вывода, очевидно, не можетъ быть для уравненія съ постоянными коэффиціентами. Это послѣднее можетъ имѣть рѣшеніе $x = \infty$ лишь въ томъ смыслѣ, что *по мѣрѣ безпредѣльнаго возрастанія величины, обозначенной* x, *обѣ части уравненія неопредѣленно стремятся къ равенству*, иначе сказать, по мѣрѣ безпредѣльнаго возрастанія величины x, *разность между лѣвою и правою частями уравненія безпредѣльно уменьшается*. Возьмемъ, напр., такое уравненіе съ постоянными коэффиціентами:

$$10 = \frac{10(x-1)}{x}$$

Рѣшеніе $x = \infty$ показываетъ, что хотя это уравненіе невозможно, однако, увеличивая безпредѣльно x, мы можемъ сдѣлать правую его часть какъ

угодно близкой къ лѣвой. Чтобы обнаружить это, найдемъ разность между лѣвой и правой частями уравненія:

$$10-\frac{10x-10}{x}=\frac{10x-10x+10}{x}=\frac{10}{x}$$

Ни при какомъ значеніи x дробь $^{10}/_{x}$ не можетъ равняться нулю, и слѣд., уравненіе не удовлетворяется никакими значеніями x; но при безпредѣльномъ увеличеніи x дробь $^{10}/_{x}$ приближается какъ угодно близко къ 0, и равенство становится все болѣе и болѣе точнымъ. Это и разумѣютъ, когда говорятъ, что предложенное уравненіе имѣетъ корень $x=\infty$.

Не трудно понять, что уравненіе съ постоянными коэффиціентами можетъ имѣть корень $x=\infty$ только въ томъ случаѣ, когда неизвѣстное входитъ въ знаменателей дробей.

130. Неопредѣленное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b_1-b}{a-a_1}$ число b_1 сдѣлается равнымъ b и число a равнымъ a_1, то x представится подъ видомъ $\frac{0}{0}$. Частное $\frac{0}{0}$, по опредѣленію дѣленія, должно означать такое число, которое, умноженное на дѣлителя 0, даетъ дѣлимое 0. Но всякое число отъ умноженія на 0, даетъ 0. Слѣд., частное $^0/_0$, по опредѣленію дѣленія, равняется какому угодно числу. И изъ уравненія видно, что въ этомъ случаѣ неизвѣстное можетъ имѣть *всевозможныя значенія*, такъ какъ уравненіе принимаетъ видъ $ax+b=ax+b$, что представляетъ тождество. Итакъ, *рѣшеніе* $a=\frac{0}{0}$ *служитъ признакомъ, что уравненіе и задача неопредѣленны*, т.-е. допускаютъ безчисленное множество рѣшеній.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ на 30 лѣтъ старше сына?

$$40+x=10+x+30;\ 40+x=40+x.$$

Обѣ части уравненія тождественны, и поэтому x можетъ имѣть произвольныя значенія, т.-е. задача неопредѣленна. Рѣшая это уравненіе по общему пріему, получаемъ:

$$x-x=40-40;\ x(1-1)=0;\ 0.x=0;\ x=\frac{0}{0}$$

131. Кажущаяся неопредѣленность. Выраженіе $\frac{0}{0}$ иногда представляетъ только *кажущуюся* неопредѣленность, такъ какъ можетъ случиться, что оно получилось только отъ того, что числитель и знаменатель дроби не были сокращены на нѣкотораго множителя, который обращается въ нуль при частныхъ значеніяхъ буквъ.

Пусть, напр., мы вывели, что $x=\frac{b^2-a^2}{b-a}$; допустивъ, что $b=a$, получимъ $x=\frac{0}{0}$; однако это не значитъ, чтобы величинѣ x можно было приписывать произвольныя значенія: сокративъ дробь на $b-a$, найдемъ: $x=b+a$, что при $b=a$ даетъ $x=2a$.

Изъ этого примѣра видно, что слѣдуетъ прежде сократить дробь, выведенную для неизвѣстнаго, а потомъ дѣлать предположенія относительно частныхъ значеній буквъ *).

132. Подобно частному $\frac{0}{0}$ выраженія: $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ и нѣкоторыя другія суть тоже неопредѣленныя. Ихъ должно вообще понимать, какъ *предѣлы*, къ которымъ стремятся численныя величины выраженій по мѣрѣ приближенія ихъ частей къ нулю или безконечности. Напр., $\frac{\infty}{\infty}$ есть предѣлъ дроби, у которой числитель и знаменатель увеличиваются безпредѣльно. Этотъ предѣлъ можетъ быть различенъ. Напр., три дроби:

$$\frac{x+2}{x^2+4},\quad \frac{2x-1}{x+3},\quad \frac{x^2+5}{x}$$

---

*) Точнѣе говоря, выраженіе $\frac{0}{0}$ означаетъ *всегда* неопредѣленность (такъ какъ сокращеніе дроби не есть процессъ обязательный). Но въ большинствѣ случаевъ въ задачахъ, изъ рѣшенія которыхъ получилось выраженіе $x=\frac{0}{0}$, прямо или скрыто требуется найти не какое-либо значеніе для x, а тотъ *предѣлъ*, къ которому величина x стремится, когда числитель и знаменатель дроби, опредѣляющей x, стремятся къ 0. Этотъ предѣлъ принимаютъ за *истинное значеніе* дроби $\frac{0}{0}$. Одинъ изъ способовъ найти этотъ предѣлъ есть сокращеніе дроби (см. *Bourlet, Leçons d' Algèbre élémentaire*).

при $x=\infty$ всѣ обращаются въ одинъ и тотъ же видъ $\frac{\infty}{\infty}$, однако истинное значеніе ихъ при этомъ различно, въ чемъ убѣдимся, раздѣливъ оба члена каждой дроби на x:

$$\frac{1+{}^2/_x}{x+{}^4/_x}, \quad \frac{2-{}^1/_x}{1+{}^3/_x}, \quad \frac{x+{}^3/_x}{1}$$

Увеличивая безпредѣльно x, найдемъ, что первая дробь имѣетъ предѣломъ 0, вторая 2 и третья увеличивается неопредѣленно.

133. Задача о курьерахъ. Въ заключеніе этой статьи приведемъ изслѣдованіе задачи о курьерахъ, въ которой вторично прослѣдимъ значеніе всѣхъ случаевъ рѣшенія, разсмотрѣнныхъ выше. Эта задача въ численномъ видѣ была рѣшена раньше. Предложимъ теперь ее въ общемъ видѣ (см. чертежъ стр. 104):

Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M *къ* N*; одинъ курьеръ въ каждый часъ проѣзжаетъ v верстъ, другой v_1 вер. Послѣдняго видѣли на станціи* B *спустя* h *часовъ послѣ того, какъ перваго замѣтили на станціи* A, *отстоящей отъ* B *на* d *верстъ. Опредѣлить мѣсто встрѣчи двухъ курьеровъ.*

Встрѣча могла произойти налѣво отъ A, или между A и B, или направо отъ B. Предположимъ послѣднее и обозначимъ черезъ x разстояніе точки встрѣчи C отъ B. Курьеру, движущемуся со скоростью v_1, отъ B до C пришлось проѣхать x вер., на что ему понадобилось $\frac{x}{v_1}$ часовъ; курьеру, ѣдущему со скоростью v вер., отъ A до C пришлось проѣхать $d+x$ верс., на что ему потребовалось $\frac{d+x}{v}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что:

$$\frac{d+x}{v}-\frac{x}{v_1}=h \qquad [1]$$

Отсюда: $$dv_1+v_1x-vx=hvv_1;\ (v_1-v)x=hvv_1-dv_1;$$
$$x=\frac{hvv_1-dv_1}{v_1-v}=\frac{v_1(vh-d)}{v_1-v}$$

1. *Положительное рѣшеніе* будетъ тогда, когда $vh>d$ и $v_1>v$, или тогда, когда $vh<d$ и $v_1<v$. Оно означаетъ, что задача возможна въ томъ предположеніи, какое мы сдѣлали,

т.-е., что курьеры встрѣтились направо отъ B. Что въ данномъ случаѣ дѣйствительно возможно только это предположеніе, видно изъ слѣдующихъ соображеній. Произведеніе vh означаетъ пространство, которое проѣхалъ 1-й курьеръ въ h часовъ; значитъ, оно показываетъ, на какое разстояніе этотъ курьеръ удалился отъ станціи A до того момента, когда второй курьеръ былъ замѣченъ въ B. Если $vh>d$, то изъ этого выводимъ, что, когда второй курьеръ былъ въ B, первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1>v$, то очевидно, что второй курьеръ догонитъ перваго гдѣ-нибудь за станціей B, а не раньше. Точно такъ же, если $vh<d$, то это значитъ, что, когда второй курьеръ пріѣхалъ въ B, первый еще не доѣхалъ до этой станціи, и такъ какъ при этомъ $v_1<v$, то очевидно, что первый курьеръ догонитъ второго гдѣ-нибудь направо отъ B, а не раньше.

2. *Отрицательное рѣшеніе* будетъ тогда, когда $vh>d$, но $v_1<v$, или же тогда, когда $vh<d$, но $v_1>v$. Это рѣшеніе обнаруживаетъ невозможность предположенія, будто курьеры встрѣтились направо отъ B. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ уравненіи [1] x на $-x$, получимъ новое уравненіе:

$$\frac{d-x}{v}-\frac{-x}{v_1}=h \text{ или: } \frac{d-x}{v}+\frac{x}{v_1}=h \qquad [2]$$

которое удовлетворяется *положительнымъ* рѣшеніемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ рѣшенію ур. [1] (теор. § 126). Легко замѣтить, что новое уравненіе соотвѣтствуетъ предположенію, что встрѣча курьеровъ произошла *налѣво* отъ B или въ точкѣ C_1, или въ точкѣ C_2. Въ самомъ дѣлѣ, при первомъ предположеніи, 1-й курьеръ отъ A до C_1 проѣхалъ $d-x$ вер. въ $\frac{d-x}{v}$ часовъ, второй курьеръ отъ C_1 до B проѣхалъ x вер. въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что сумма этихъ временъ должна равняться h, что и выражается ур. [2]. Если теперь предположимъ, что встрѣча была въ C_2, то первый курьеръ отъ C_2 до A проѣхалъ $x-d$ вер. въ $\frac{x-d}{v}$ часовъ, а 2-й отъ C_2 до B проѣхалъ

x вер. въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что $\frac{x}{v_1}$ должно быть болѣе $\frac{x-d}{v}$ на h, т.-е.:

$$\frac{x}{v_1}-\frac{x-d}{v}=h \text{ или: } \frac{x}{v_1}-\frac{-(d-x)}{v}=h, \text{ т.-е. } \frac{x}{v_1}+\frac{d-x}{v}=h$$

а это и есть уравненіе [2].

Легко показать и независимо отъ отрицательнаго рѣшенія ур. [1], что при допущенныхъ условіяхъ встрѣча должна произойти налѣво отъ B. Если $vh>d$, то второй курьеръ находился въ B тогда, когда 1-й уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1<v$, то 2-й курьеръ не можетъ догнать 1-го за станціей B, а встрѣтился съ нимъ гдѣ-нибудь раньше. Также если $vh<d$, то 2-й кур. былъ въ B, когда 1-й еще не доѣхалъ до B, и такъ какъ при этомъ $v_1>v$, то очевидно, что встрѣча произошла налѣво отъ B.

3. *Нулевое рѣшеніе* получится, когда $vh=d$, $v_1 \gtrless v$. Въ этомъ случаѣ встрѣча произошла на станціи B.

4. *Безконечное рѣшеніе* получится, если $vh \gtrless d$, а $v_1=v$. Въ этомъ случаѣ встрѣчи не могло быть, потому что оба курьера ѣдутъ съ одинаковой скоростью, и когда второй изъ нихъ былъ въ B, первый или не доѣхалъ до этой станціи, или уже проѣхалъ ее.

Безконечное рѣшеніе еще означаетъ, что если v неограниченно приближается къ равенству съ v_1, то мѣсто встрѣчи безпредѣльно удаляется отъ B.

5. *Неопредѣленное рѣшеніе* получится, если $vh=d$ и $v_1=v$. Въ этомъ случаѣ каждую точку пути можно считать за точку встрѣчи, такъ какъ курьеры все время ѣдутъ вмѣстѣ; другими словами, задача при этихъ предположеніяхъ становится неопредѣленной.

Система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

134. Общій видъ уравненія. Всякое уравненіе первой сте-

пени съ 2-мя неизвѣстными, послѣ надлежащихъ преобразованій, можетъ быть приведено къ слѣдующему виду:

$$ax+by=c$$

гдѣ a, b и c означаютъ числа не только положительныя, но и отрицательныя.

135. Рѣшеніе уравненій. Пусть имѣемъ систему:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Умноживъ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b, вычтемъ второе уравненіе изъ перваго:

$$\begin{array}{l} ab'x+bb'y=cb' \\ -a'bx-bb'y=-c'b \\ \hline (ab'-a'b)x=cb'-c'b \end{array} \qquad x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$$

Умноживъ члены перваго уравненія на a', а второго на a, вычтемъ уравненія почленно:

$$\begin{array}{l} aa'x+ba'y=ca' \\ -aa'x-b'ay=-c'a \\ \hline (ba'-b'a)y=ca'-c'a \end{array} \qquad y=\frac{ca'-c'a}{ba'-ab'}$$

Знаменателей обѣихъ формулъ можно сдѣлать одинаковыми, если оба члена дроби для y умножимъ на -1; тогда получимъ:

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

136. Изслѣдованіе. Разсмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

I. *Знаменатель* $ab'-a'b$ *не равенъ нулю.*

Въ этомъ случаѣ рѣшенія могутъ быть положительныя, отрицательныя и равныя нулю. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось при изслѣдованіи одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Замѣтимъ, что нулевыя рѣшенія для обоихъ неизвѣстныхъ могутъ получиться лишь тогда, когда оба свободные члена c и c' равны нулю; это можно видѣть непосредственно изъ уравненій, которыя, при $x=0$ и $y=0$, даютъ: $0=c$ и $0=c'$.

8*

II. *Знаменатель* $ab'-a'b$ *равенъ нулю.*

Предположимъ, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ: a, a', b, b' не равенъ нулю. Докажемъ, что при этомъ предположеніи *если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ* $\frac{0}{0}$, *то и другое неизвѣстное представляется подъ тѣмъ же видомъ.*

Пусть, напр., $x=\frac{0}{0}$. Для этого нужно, чтобы

$$cb'=c'b \text{ и } ab'=a'b$$

Умноживъ лѣвую часть перваго равенства на правую часть второго, а правую перваго на лѣвую второго, получимъ:

$$cb'a'b=c'bab'; \text{ откуда } cb'a'b-c'bab'=0 \text{ или } bb'(a'c-ac')=0$$

Такъ какъ b и b' не равны нулю, то послѣднее равенство возможно только тогда, когда $a'c-ac'=0$; но тогда $y=\frac{0}{0}$.

Также, если допустимъ, что $y=\frac{0}{0}$, т.-е. $ac'=a'c$ и $ab'=a'b$, то, перемноживъ эти равенства крестъ-накрестъ, найдемъ: $ac'a'b=a'cab'$, откуда: $aa'(c'b-cb')=0$. Такъ какъ a и a' не равны 0, то послѣднее равенство даетъ: $c'b-cb'=0$, а тогда $x=\frac{0}{0}$.

Легко убѣдиться, что рѣшенія: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$ означаютъ *неопредѣленность* задачи.

Дѣйствительно, умноживъ всѣ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b (что можемъ сдѣлать, такъ какъ b и b' по предложенію не равны 0), получимъ:

$$\begin{aligned} ab'x+bb'y&=cb' \\ a'bx+b'by&=c'b \end{aligned} \qquad [A]$$

Если $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$, то $ab'=a'b$, $cb'=c'b$; тогда два урав-

ненія [A] представляютъ собою *одно уравненіе* съ 2 неизвѣстными; а въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ (§ 97), неизвѣстныя могутъ имѣть безчисленное множество значеній.

Пусть теперь одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{m}{0}$; тогда другое неизвѣстное должно представиться также подъ видомъ $\frac{n}{0}$; дѣйствительно, если бы оно приняло видъ $\frac{0}{0}$, то и первое неизвѣстное, по доказанному, имѣло бы тотъ же видъ, а мы предположили, что оно имѣетъ видъ $\frac{m}{0}$.

Рѣшенія: $x=\frac{m}{0}$ и $y=\frac{n}{0}$ означаютъ *несовмѣстность* уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если $ab'=a'b$, а $cb'\neq c'b$, то лѣвыя части уравненій [A] имѣютъ одинаковыя численныя величины, а правыя—разныя; значитъ, уравненія несовмѣстны, и задача невозможна.

Полезно замѣтить, что рѣшенія: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$ нельзя понимать въ томъ смыслѣ, что *обоимъ* неизвѣстнымъ можно придавать совершенно произвольныя значенія: выбравъ значеніе одного изъ нихъ произвольно, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ другое неизвѣстное, такъ какъ значенія ихъ должны удовлетворять уравненію $ax+by=c$ или $a'x+b'y=c'$.

Изъ всего сказаннагѡ заключаемъ: *система двухъ уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными допускаетъ или одно опредѣленное рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній, или же ни одного рѣшенія.*

137. Частный случай. Если нѣкоторые изъ коэффиціентовъ: a, a', b и b' равны нулю, то могутъ представиться особые случаи. Положимъ, напр., что оба коэффиціента при одномъ и томъ же неизвѣстномъ равны нулю. Пусть $b=b'=0$; тогда $a'b-ab'=0$ и $cb'-c'b=0$; слѣд., $x=\frac{0}{0}$, а

$y=\frac{m}{0}$ или $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будетъ ли ac' не равно или равно $a'c$. Уравненія въ этомъ случаѣ даютъ:

$$\begin{cases} ax+0.\ y=c \\ \\ a'x+0.\ y=c \end{cases} \text{откуда: } \begin{cases} x=\frac{c}{a} \\ x=\frac{c'}{a'} \end{cases}$$

Если ac' не равно $a'c$, то $\frac{c}{a}$ не равно $\frac{c'}{a'}$ и уравненія невозможны, потому что для x получаются два различныя значенія; между тѣмъ, въ этомъ случаѣ формулы для неизвѣстныхъ даютъ: $x=\frac{0}{0}, y=\frac{m}{0}$. Если же $ac'=a'c$, то $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$, тогда для x получается опредѣленное рѣшеніе, а y можетъ имѣть всевозможныя значенія, хотя общія формулы въ этомъ случаѣ даютъ: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$.

Изъ этого разбора слѣдуетъ, что когда нѣкоторыя изъ чиселъ: a, a', b и b', равны нулю, не слѣдуетъ полагаться на общія формулы, выведенныя для неизвѣстныхъ, а должно подвергать каждый случай особому изслѣдованію.

ОТДѢЛЪ IV.

Степени и корни.

ГЛАВА I.

Возвышеніе въ степень одночленовъ.

138. Опредѣленія. n-*овою степенью числа* a *наз. произведеніе* n *одинаковыхъ сомножителей, равныхъ* a.

Такъ, 3-я степень 2-хъ есть произведеніе 2.2.2, равное 8; 5-я степень $^1/_2$ есть произведеніе $^1/_2.^1/_2.^1/_2.^1/_2.^1/_2$, равное $^1/_{32}$.

Вторая степень наз. иначе *квадратомъ*, а третья—*кубомъ*.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится n-ная степень числа a, наз. *возвышеніемъ* а *въ* n-*ую степень*.

n-ная степень числа a обозначается такъ: a^n. Изъ опредѣленія видно, что a^n равносильно произведенію $a.a.a...a$ (n разъ).

Число n одинаковыхъ сомножителей, образующихъ степень, наз. *показателемъ* степени; по смыслу опредѣленія видно, что число это *цѣлое, положительное, не равное 0.*

Впрочемъ, ради обобщенія вопросовъ, условились допускать степени съ показателемъ 0 (§ 51) и съ показателями отрицательными (§ 51, a), разумѣя при этомъ, что при всякомъ a выраженіе a^0 равно 1, а выраженіе a^{-n} равносильно дроби $\frac{1}{a^n}$ (§ 71).

139. Правило знаковъ. Мы видѣли (§ 39), что произведеніе оказывается положительнымъ въ томъ случаѣ, когда въ него входитъ *четное* число отрицательныхъ множителей и отрицательнымъ въ томъ случаѣ, когда число такихъ множителей *нечетное;* поэтому:

Отъ возвышенія отрицательнаго числа въ степень съ четнымъ показателемъ получается положительное число, а съ нечетнымъ показателемъ—отрицательное.

Такъ: $(-a)^2=(-a)\ (-a)=+a^2$; $(-a)^3=(-a)^2(-a)=(+a^2)\ (-a)=-a^3$ и т. д.

140. Теоремы. 1) *Чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно возвысить въ эту степень каждаго сомножителя отдѣльно.*

Пусть, напр., требуется возвысить произведеніе abc въ квадратъ. Это значитъ, что требуется abc умножить на abc. Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя и т. д. Поэтому:

$$(abc)^2=(abc).(abc)=(abc)abc=abcabc$$

Сомножителей произведенія мы можемъ соединить въ какія угодно группы. Соединимъ ихъ такъ:

$$(abc)^2=(aa)(bb)(cc)=a^2b^2c^2$$

Вообще: $(abc)^n=(abc)(abc)(abc)\ldots=abcabcabc\ldots=$
$=(aaa\ldots)(bbb\ldots)(ccc\ldots)=a^nb^nc^n.$

2) *Чтобы возвысить степень въ другую степень, достаточно перемножить показателей этихъ степеней.*

Пусть, напр., требуется возвысить a^2 въ кубъ, т.-е. требуется найти произведеніе $a^2.a^2.a^2$. При умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$(a^2)^3=a^2.a^2.a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}=a^6.$$

Вообще: $(a^m)^n=a^ma^ma^m\ldots=a^{m+m+m+\cdots}=a^{mn}$

3) *Чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя.*

Это слѣдуетъ изъ правила умноженія дробей. Напр.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a.a.a}{b.b.b}=\frac{a^3}{b^3}$$

Вообще: $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots=\frac{aaa\ldots.}{bbb\ldots.}=\frac{a^n}{b^n}$$

140,*a*. **Эти теоремы остаются вѣрными и для отрицательныхъ показателей.** Для доказательства примемъ во вниманіе, что количество съ отрицательнымъ показателемъ равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель то же количество съ положительнымъ показателемъ (§ 71); вслѣдствіе этого и на основаніи правилъ о положительныхъ показателяхъ можемъ писать:

1) $$(abc)^{-n}=\frac{1}{(abc)^n}=\frac{1}{a^nb^nc^n}=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\frac{1}{c^n}=a^{-n}b^{-n}c^{-n}.$$

2) $$(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{(-m)n}$$

$$(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{m(-n)}$$

$$(a^{-m})^{-n}=\frac{1}{(a^{-m})^n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=1:\frac{1}{a^{mn}}=a^{mn}=a^{(-m)\,(-n)}$$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=1:\frac{a^n}{b^n}=\frac{b^n}{a^n}=\frac{1}{a^n}:\frac{1}{b^n}=a^{-n}:b^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

Легко также убѣдиться, что теоремы эти примѣнимы и къ случаю, когда показатель степени есть 0. Напр.:

$$(abc)^0=a^0b^0c^0=1.1.1=1.$$

141. Примѣненіе этихъ теоремъ къ возвышенію въ степень одночленовъ. Пусть требуется возвысить цѣлый одночленъ $3a^2b^3c$ въ n-ую степень. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$(3a^2b^3c)^n=3^n(a^2)^n(b^3)^nc^n=3^na^{2n}b^{3n}c^n.$$

Правило. *Чтобы возвысить въ степень цѣлый одночленъ, достаточно возвысить въ эту степень его коэффиціентъ, а показателей буквъ умножить на показателя степени.*

Дробные одночлены возвышаются въ степень по теоремѣ 3-й, т.-е. числитель и знаменатель возвышаются отдѣльно; напр.:

$$\left(\frac{-3a^nb^2}{4cd^{r-1}}\right)^3=\frac{(-3a^nb^2)^3}{(4cd^{r-1})^3}=\frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}=-\frac{27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}$$

ГЛАВА II.

Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.

142. Теорема. *Квадратъ многочлена равенъ квадрату 1-го члена+удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й+квадратъ 2-го чл.+удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й+квадратъ 3-го чл.+удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й+квадратъ 4-го члена и т. д.,* т.-е. $(a+b+c+d+\ldots)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+$
$+2(a+b+c)d+d^2+\ldots$

Док. Возьмемъ сначала двучленъ $a+b$ и возвысимъ его въ квадратъ (§ 46):

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Теперь приложимъ къ $a+b$ третій членъ c и возвысимъ въ квадратъ сумму $a+b+c$, разсматривая ее, какъ двучленъ, въ которомъ первый членъ есть $a+b$, а второй членъ c:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи $(a+b)^2$ черезъ $a^2+2ab+b^2$, получимъ:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$$

Приложивъ затѣмъ четвертый членъ d, получимъ, подобно предыдущему:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$$

Продолжая такимъ образомъ прикладывать по одному члену, убѣдимся, что доказываемая теорема примѣнима къ многочленамъ съ какимъ угодно числомъ членовъ.

142,*a*. **Другое выраженіе квадрата многочлена.** Раскрывъ скобки въ правой части послѣдняго равенства и измѣнивъ порядокъ членовъ, получимъ:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

т.-е. квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями: перваго члена на второй, перваго члена на третій, перваго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ второго члена на третій, второго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ третьяго члена на четвертый и т. д. Короче сказать:

квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями каждаго члена на всѣ послѣдующіе.

143. Замѣчаніе о знакахъ. Многочленъ $a+b+c\ldots.$ представляетъ собою *алгебраическую* сумму, т.-е. члены его могутъ быть числами отрицательными. Въ этомъ случаѣ полезно замѣтить, что въ окончательномъ результатѣ положительными членами окажутся: 1) квадраты всѣхъ членовъ и 2) тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ членовъ. Напр.:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+(2x)^2+1^2-2(3x^2)(2x)+2(3x^2).1-2(2x).1=$$
$$=9x^4+4x^2+1-12x^3+6x^2-4x=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1$$

ГЛАВА III.
Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

144. Опредѣленіе. *Корнемъ* (или *радикаломъ*) n-*й степени изъ числа* a *называется такое число*, n-*ая степень котораго равна* a.

Такъ, корень второй степени изъ 49-и есть 7, потому что $7^2=49$; корень третьей степени изъ 125 есть 5, потому что $5^3=125$.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень изъ даннаго числа, наз. *извлеченіемъ корня;* это дѣйствіе обратно возвышенію въ степень. Число n, означающее, какой степени корень извлекается изъ числа a, наз. *показателемъ* корня (или радикала).

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{}$ (знакъ *радикала*); подъ горизонтальной чертой его пишутъ число, корень изъ котораго отыскивается, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; такъ, выраженіе $\sqrt[3]{27}$ означаетъ, что изъ 27 извлекается корень третьей степени. Показателя корня второй степени принято опускать; напр., $\sqrt{16}$ замѣняетъ обозначеніе $\sqrt[2]{16}$.

Корень второй степени наз. иначе *квадратнымъ*, а третьей степени—*кубичнымъ*. Число, стоящее подъ знакомъ радикала, называютъ *подкореннымъ* числомъ.

Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ, что $(\sqrt{a})^2=a$, $(\sqrt[3]{a})^3=a$ и вообще $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

145. Правило знаковъ. Изъ условій, принятыхъ въ алгебрѣ относительно умноженія отрицательныхъ чиселъ, слѣдуетъ:

1) *Корень нечетной степени изъ положительнаго числа есть положительное число, а изъ отрицательнаго числа—отрицательное;* напр., $\sqrt[3]{8}=2$ и $\sqrt[3]{-8}=-2$, потому что $2^3=8$ и $(-2)^3=-8$.

2) *Корень четной степени изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія съ одинаковой абсолютной величиной, но съ разными знаками.* Такъ, $\sqrt{4}=+2$ и $\sqrt{4}=-2$, потому что $(+2)^2=4$ и $(-2)^2=4$; также $\sqrt[4]{81}=+3$ и -3, потому что $(+3)^4=81$ и $(-3)^4=81$. Двойное значеніе корня

обозначается постановкой двухъ знаковъ передъ абсолютной величиной корня; такъ, пишутъ: $\sqrt[4]{81}=\pm3$.

3) *Корень четной степени изъ отрицательнаго числа представляетъ невозможное выраженіе,* потому что всякое число, положительное и отрицательное, возвышенное въ четную степень, даетъ положительное, а не отрицательное число. Напр., $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа наз. *мнимымъ количествомъ;* въ противоположность такимъ количествамъ всякій корень изъ положительнаго числа и корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа наз. *вещественнымъ* или *дѣйствительнымъ* количествомъ.

Въ нашемъ изложеніи знакомъ $\sqrt{}$ мы будемъ обозначать большею частью только *ариѳметическое* значеніе корня, т.-е. положительное значеніе корня изъ положительнаго числа.

146. Теоремы. 1) *Чтобы извлечь корень изъ произведенія, достаточно извлечь его изъ каждаго сомножителя отдѣльно.*

Требуется доказать, что: $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ую степень (причемъ примемъ во вниманіе теорему: чтобы возвысить произведеніе въ степень, достаточно....):

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n$$

Но $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $(\sqrt[n]{b})^n=b$ и $(\sqrt[n]{c})^n=c$;

Значитъ: $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n=abc$.

Если же n-ая степень произведенія $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ равна abc, то оно представляетъ собою корень n-ой степени изъ abc.

Примѣръ: $\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{8.64}=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64}=2.4=8$.

2) *Чтобы извлечь корень изъ степени, показатель которой дѣлится безъ остатка на показателя корня, достаточно раздѣлить показателя степени на показателя корня.*

Такъ, $\sqrt[3]{a^6}=a^2$, потому что $(a^2)^3=a^6$.

Докажемъ это въ общемъ видѣ.

Пусть въ выраженіи $\sqrt[n]{a^m}$ число m дѣлится на n безъ остатка; тогда, назвавъ частное отъ дѣленія m на n буквою p, можемъ положить, что $m=np$. Требуется доказать, что:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}}=a^p$$

Для доказательства возвысимъ a^p въ n-ую степень (чтобы возвысить степень въ другую степень, достаточно....):

$$(a^p)^n=a^{pn}=a^m$$

Если же n-ая степень количества a^p равна a^m, то это значитъ, что $\sqrt[n]{a^m}=a^p$.

Примѣръ: $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$

Замѣчаніе. Эта теорема остается вѣрною и для *отрицательнаго* показателя степени, изъ которой извлекается корень; напр.:

$$\sqrt[3]{a^{-6}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a^6}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^6}}=\frac{1}{a^2}=a^{-2}=a^{\frac{-6}{3}}$$

3) *Чтобы извлечь корень изъ дроби, достаточно извлечь его изъ числителя и знаменателя отдѣльно.*

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ую степень (чтобы возвысить дробь въ степень, достаточно....):

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

что доказываетъ вѣрность предполагавшагося равенства.

Примѣръ: $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$

147. Примѣненіе этихъ теоремъ къ извлеченію корня изъ одночленовъ. Пусть дано извлечь корень 3-й степени изъ цѣлаго одночлена $8a^9b^6c^{12}$. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$\sqrt[3]{8a^9b^6c^{12}}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{b^6}\sqrt[3]{c^{12}}=2a^3b^2c^4$$

Правило. *Чтобы извлечь корень изъ цѣлаго одночлена, достаточно извлечь его изъ коэффиціента и раздѣлить показателей буквъ на показателя корня, если это дѣленіе возможно нацѣло.*

Чтобы извлечь корень изъ дробнаго одночлена, достаточно примѣнить теорему 3-ю, т.-е. извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27a^6x^{3n}}{m^9n^3}}=\frac{\sqrt[3]{27a^6x^{3n}}}{\sqrt[3]{m^9n^3}}=\frac{3a^2x^n}{m^3n}$$

148. Вынесеніе множителей за знакъ радикала. Когда показатели всѣхъ или нѣкоторыхъ буквъ въ подкоренномъ выраженіи больше показателя корня, но не дѣлятся на него безъ остатка, тогда можно разложить подкоренное выраженіе на множителей и извлечь корень изъ тѣхъ множителей, изъ которыхъ это возможно; такое преобразованіе корня называютъ вынесеніемъ множителей за знакъ радикала.

Примѣры: 1) $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a}$

2) $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[3]{a^3a}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a}=a\sqrt[3]{a}$

3) $\sqrt[5]{x^{13}}=\sqrt[5]{x^{10}x^3}=\sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{x^3}=x^2\sqrt[5]{x^3}$

4) $\sqrt{24a^4x^3}=\sqrt{4.6a^4x^2x}=2a^2x\sqrt{6x}$

149. Подведеніе множителей подъ знакъ радикала. Иногда бываетъ полезно, наоборотъ, подвести подъ знакъ радикала множителя, стоящаго передъ нимъ; для этого надо возвысить его въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала, и написать множителемъ подъ радикаломъ.

Примѣры: 1) $a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5}$

2) $3x^2y\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{(3x^2y)^3xy}=\sqrt[3]{27x^7y^4}$

ГЛАВА IV.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ.

Извлеченіе корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ цѣломъ числѣ.

150. Предварительныя замѣчанія. 1) Если станемъ возвышать въ квадратъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4.... то получимъ безконечный рядъ возрастающихъ квадратовъ:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100....

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр. 40), не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа.

Пусть намъ дано какое-нибудь цѣлое число, напр., 4082, и требуется изъ него извлечь квадратный корень. Допустимъ, мы не знаемъ, находится ли это число въ рядѣ квадратовъ цѣлыхъ чиселъ, и потому заранѣе не знаемъ, можно ли изъ него извлечь цѣлый корень. Въ такихъ случаяхъ условимся, что извлечь квадратный корень изъ даннаго числа значитъ: извлечь этотъ корень или изъ самаго числа (если оно окажется квадратомъ цѣлаго числа), или же изъ *наибольшаго* квадрата цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

2) Замѣтимъ еще, что всегда легко опредѣлить заранѣе, сколько будетъ цыфръ въ квадратномъ корнѣ изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ данномъ числѣ. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$1^2=1$ $\quad 10^2=100$ $\quad 100^2=10000$

$1000^2=1000000$ $\quad 10000^2=100000000$ и т. д.

Положимъ, напр., что требуется найти $\sqrt{4082}$. Такъ какъ $4082<10000$, то и наибольшій квадратъ цѣлаго числа, заключающійся въ 4082, менѣе 10000; съ другой стороны, такъ какъ $4082>100$, то наиб. квадратъ, заключающійся въ 4082, болѣе (или равенъ) 100. Значитъ, квадратный корень изъ наиб. квадрата, заключающагося въ 4082, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цыфръ.

Подобными разсужденіями мы можемъ опредѣлить, если нужно, число цыфръ корня изъ всякаго даннаго числа.

151. Свойство числа десятковъ корня. Если данное число меньше 100, то квадр. корень изъ него выражается одною цыфрою и потому его легко найти по таблицѣ умноженія.

Когда данное число болѣе 100, то квадратный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣд., состоитъ изъ двухъ или болѣе цыфръ. Сколько бы цыфръ въ немъ не было, условимся разсматривать его, какъ сумму только *десятковъ* и *единицъ;* если, напр., корень будетъ число 358, то мы будемъ его представлять такъ: 35 десятковъ+8 ед.

Пусть требуется извлечь кв. корень изъ какого-нибудь числа, напр. изъ числа 4082. Обозначимъ число десятковъ корня черезъ x (все равно, будетъ ли оно однозначное или многозначное), а число его единицъ черезъ y. Такъ какъ въ каждомъ десяткѣ содержится 10 ед., то искомый корень выразится $10x+y$. Квадратъ этой суммы долженъ быть наибольшимъ квадратомъ цѣлаго числа, заключающимся въ 4082; въ этомъ числѣ можетъ быть еще нѣкоторый избытокъ надъ наиб. квадратомъ, который назовемъ *остаткомъ отъ извлеченія корня;* поэтому можемъ написать:

$$4082=(10x+y)^2+\text{ост.}=100x^2+2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти число x, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого уравненія только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ заключается 40; посмотримъ, сколько ихъ будетъ въ правой части. Въ первомъ членѣ ($100x^2$) сотенъ, очевидно, заключается x^2; въ суммѣ остальныхъ трехъ членовъ сотни могутъ быть, но могутъ и не быть (что зависитъ отъ величины чиселъ x и y и остатка отъ извлеченія); значитъ, можемъ только утверждать, что въ правой части уравненія всѣхъ сотенъ будетъ или x^2, или больше x^2. Такъ какъ число сотенъ въ лѣвой части уравненія должно равняться числу сотенъ въ правой, то

$$40 \geqslant x^2$$

Изъ этого слѣдуетъ, что x^2 есть такой квадратъ цѣлаго числа, который содержится въ 40; но такихъ квадратовъ есть

нѣсколько, а именно: 36, 25, 16, и т. д. Докажемъ, что за x^2 надо принять *наибольшій изъ этихъ квадратовъ*, т.-е. 36. Дѣйствительно, если бы мы взяли за x^2, положимъ, 25, то искомый корень содержалъ бы въ себѣ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами; но число, состоящее изъ 5 десятковъ съ единицами (хотя бы этихъ единицъ было и 9), меньше 6-ти десятковъ; между тѣмъ квадратъ 6 дес. составляетъ только 36 сотенъ, что меньше 4082, а такъ какъ мы ищемъ квадр. корень изъ *наибольшаго* квадрата цѣлаго числа, какой только заключается въ 4082, то не можемъ взять для корня 5 дес. съ единицами, когда и 6-ти десятковъ оказывается немного. Если же за x^2 надо взять число 36, то $x=\sqrt{36}$.

Такимъ образомъ, мы доказали слѣдующее свойство числа десятковъ корня: *число десятковъ искомаго корня равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.*

Когда данное число, какъ взятое нами, менѣе 10000, тогда число сотенъ въ немъ менѣе 100; въ этомъ случаѣ десятки корня находятся по таблицѣ умноженія.

152. Свойство числа единицъ корня. Положимъ, что мы нашли десятки корня; тогда мы можемъ вычислить квадратъ десятковъ, т.-е. членъ $100x^2$; для нашего примѣра $x=6$ и $100x^2$ составитъ 3600. Вычтемъ это число изъ 4082:

$$\begin{array}{r} 4082 \\ -36 \\ \hline 482 \end{array}$$

Для этого достаточно изъ 40 сотенъ вычесть 36 сотенъ и къ остатку снести цыфры 82. Получившееся число 482 назовемъ *первымъ остаткомъ*. Въ немъ заключается: удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы, квадратъ единицъ и остатокъ отъ извлеченія, если онъ есть, т.-е.

$$482=2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти y, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого уравненія только одни десятки. Въ лѣвой части ихъ 48, а въ правой $2xy$, или больше (если въ суммѣ y^2+ост. окажутся десятки); поэтому:

$$48\geqslant 2xy;\ \text{откуда:}\qquad y\leqslant\frac{48}{2x}$$

Такимъ оброзомъ, мы приходимъ къ слѣдующему свойству числа единицъ корня: *число единицъ корня равно или меньше цѣлаго частнаго отъ дѣленія числа десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня.*

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти единицы корня, если его десятки уже найдены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное прежде число 6 найдемъ, что $y \leqq 4$. Отсюда слѣдуетъ, что y равенъ или 4, или 3, или 2, или 1, или 0. Здѣсь мы не можемъ утверждать заранѣе, что y равняется наибольшему изъ этихъ чиселъ; это иногда бываетъ, а иногда и нѣтъ. Чтобы узнать окончательно, какому изъ этихъ чиселъ равняется y, станемъ *испытывать эти цыфры*, начиная съ большей, т.-е. съ 4. Для этого вычислимъ $2xy10+y^2$ и сравнимъ полученное число съ 482; если сумма $2xy10+y^2$ дастъ число, большее 482, то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергнемъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру.

Вычислить сумму $2xy10+y^2$ всего проще можно такъ:

$$2xy10+y^2=(2x10+y)y=(2.6.10+4)4=$$
$$=(120+4)4=124.4=496$$

т.-е. *чтобы получить заразъ удвоенное произведеніе десятковъ на единицы* **и** *квадратъ единицъ, слѣдуетъ къ удвоенному числу десятковъ* (къ 12) *приписать справа цыфру единицъ* (4) **и** *на эту же цыфру умножить получившееся число.*

Такъ какъ $496>482$, то цыфра 4 не годится; надо испытать цыфру 3 подобнымъ же способомъ: $123.\ 3=369$.

Такъ какъ $369<482$, то цыфра 3 годится. Искомый корень есть 63.

Вычтя 369 изъ 482, получимъ окончательный остатокъ отъ извлеченія корня: $482-369=113$, такъ что можемъ написать:

$$4082=63^2+113.$$

153. Расположеніе дѣйствія. На практикѣ извлеченіе корня обыкновенно располагаютъ по слѣдующему **правилу:**

$\sqrt{40,82}=63$
36
123|48,2
3|36 9
11 3

Отдѣливъ въ подкоренномъ числѣ сотни, извлекаютъ квадр. корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ ихъ; найденное число (6) пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ десятковъ. Вычитаютъ квадратъ десятковъ корня (36) изъ сотенъ даннаго числа и къ остатку отъ сотенъ сносятъ двѣ остальныя цыфры. Налѣво отъ остатка проводятъ вертикальную черту, за которою пишутъ удвоенное число десятковъ корня (12). Отдѣливъ въ остаткѣ десятки, дѣлятъ число ихъ на удвоенное число десятковъ корня, т.-е. на число, поставленное раньше налѣво отъ вертикальной черты. Цѣлое число, получившееся отъ этого дѣленія, подвергаютъ испытанію. Для этого приписываютъ его справа къ удвоенному числу десятковъ (за вертикальной чертой) и на него же умножаютъ получившееся отъ этого число (123 умн. на 3). Если произведеніе окажется больше остатка, то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру. Получивъ произведеніе, не большее остатка, подписываютъ его подъ остаткомъ и вычитаютъ, а испытуемую цыфру пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

154. Извлеченіе кв. корня изъ чиселъ, большихъ 10000. Пусть теперь требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь числа, большаго 10000, напр. изъ 35782. По доказанному выше, число десятковъ корня равно квадр. корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ, т.-е. въ 357; значитъ, прежде всего надо извлечь квадр. корень изъ этого числа.

Такъ какъ число 357 имѣетъ только 3 цыфры, то этотъ корень найдется по предыдущему:

$\sqrt{3,57}=18$
1
28|25,7
8|22 4
3 3

Значитъ, въ искомомъ корнѣ изъ 35782 заключается 18 десятковъ. Чтобы найти единицы его, надо, согласно доказанному прежде, предварительно изъ 35782 вычесть квадратъ 18 десятковъ, для чего достаточно изъ 357 вычесть

квадратъ 18 и къ остатку снести цыфры 82. Остатокъ отъ вычитанія квадрата 18 изъ 357 у насъ уже есть: это 33. Значитъ, для полученія остатка отъ вычитанія квадрата 18 десятковъ изъ 35782, достаточно къ 33 приписать справа цыфры 82. Дѣйствіе мы можемъ продолжать тамъ же, гдѣ находили $\sqrt{357}$:

```
√3,57,82=189
 1
28|25,7
 8|22,4
369|3 38,2
  9|3 32 1
       6 1
```

Отдѣливъ десятки въ остаткѣ 3382, дѣлимъ, согласно доказанному, число ихъ (338) на удвоенное число десятковъ корня (на 36); цыфру (9), полученную отъ дѣленія, подвергаемъ испытанію, для чего ее приписываемъ справа къ удвоенному числу десятковъ корня (къ 36) и на нее умножаемъ получившееся число (369 на 9). Такъ какъ произведеніе оказалось меньше второго остатка, то цыфра **9 годится; ее пишемъ въ корнѣ** на мѣстѣ единицъ.

Вообще, чтобы извлечь квадр. корень изъ какого угодно числа, надо сначала извлечь корень изъ числа его сотенъ; если это число болѣе 100, то придется искать корень изъ числа сотенъ этихъ сотенъ, т.-е. изъ десятковъ тысячъ даннаго числа; если и это число болѣе 100, придется извлекать корень изъ числа сотенъ десятковъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа, и т. д.

Правило. *Чтобы извлечь квадр. корень изъ даннаго числа, разбиваютъ его, отъ правой руки къ лѣвой, на грани по 2 цыфры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть и одна цыфра. Чтобы найти первую цыфру корня, извлекаютъ квадр. корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цыфру, изъ первой грани вычитаютъ квадратъ первой цыфры корня, къ остатку сносятъ вторую грань и число десятковъ получившагося числа дѣлятъ на удвоенную первую цыфру корня; полученное цѣлое число подвергаютъ испытанію. Слѣдующія цыфры корня находятся по тому же пріему.*

Вотъ примѣры извлеченія квадр. корня изъ чиселъ, состоящихъ изъ многихъ граней:

```
√3,50,34,87,59=18717           √9,51,10,56=3084
  1  .  .  .  .                  9  .  .  .
28|25,0  .  .  .               608|511,0  .
 8| 224  .  .  .                 8|486 4  .
367|263,4  .  .                6164|2465,6
  7|256 9  .  .                   4|2465 6
 3741|658,7  .                        0
    1|374 1
 37427|28465,9
     7|26198 9
        22670
```

155. Число цыфръ въ корнѣ. Въ началѣ этой главы (§ 150, $_2$) мы уже говорили о томъ, какъ можно заранѣе опредѣлить число цыфръ искомаго квадратнаго корня; теперь, ознакомившись съ процессомъ нахожденія этихъ цыфръ, приходимъ къ таковому простому выводу: въ корнѣ столько цыфръ, сколько въ подкоренномъ числѣ заключается граней по 2 цыфры каждая, кромѣ послѣдней, которая можетъ имѣть и 2 и 1 цыфру; другими словами: если въ подкоренномъ числѣ *четное число* цыфръ, то въ корнѣ *вдвое меньше* цыфръ; если же въ подкоренномъ числѣ *нечетное число* цыфръ, то въ корнѣ цыфръ *вдвое меньше этого числа, увеличеннаго на* 1. Напр., квадр. корень изъ 6-значнаго числа содержитъ 3 цыфры, квадр. корень изъ 7-значнаго числа имѣетъ 4 цыфры.

156. Какъ узнать, не мала ли цыфра, взятая въ корнѣ. Можетъ случиться, что, находя какую-нибудь цыфру корня, мы по ошибкѣ взяли цыфру меньшую, чѣмъ слѣдовало бы. Существуетъ признакъ, по которому это легко обнаружить.

Если въ корнѣ взята цыфра меньшая, чѣмъ слѣдуетъ, то остатокъ окажется больше удвоеннаго корня плюсъ единица, или равенъ этому числу. Пусть, напр., мы взяли въ корнѣ число a, когда слѣдовало бы взять больше, положимъ, $a+1$. Въ такомъ случаѣ подкоренное число больше или равно $(a+1)^2$, и потому избытокъ его надъ a^2, т.-е. остатокъ отъ извлеченія, долженъ быть больше или равенъ разности $(a+1)^2-a^2$, которая равна $2a+1$.

Обратно, *если остатокъ отъ извлеченія больше удвоеннаго корня плюсъ единица, или равенъ этому числу, то въ корнѣ взято меньше, чѣмъ слѣдуетъ.* Дѣйствительно, если остатокъ больше или равенъ $2a+1$, то подкоренное число больше или равно $a^2+(2a+1)$, т.-е. оно больше или равно $(a+1)^2$, и потому квадр. корень изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключеннаго въ данномъ числѣ, будетъ не a, а, по крайней мѣрѣ, $a+1$.

Примѣры.

1) $\sqrt{23,45}=47$
16
87 | 74,5
7 | 60 9
13 6

Остатокъ 136 больше 2.47+1; значитъ, взятая для испытанія цыфра 7 мала.

2) $\sqrt{23,45}=48$
16
88 | 74,5
8 | 70,4
41

Остатокъ 41 меньше 2.48+1; значитъ, взятая для испытанія цыфра 8 не мала.

157. Когда искомый корень содержитъ много цыфръ, то при нахожденіи его полезно руководствоваться слѣдующей истиной:

Теорема. *Когда найдено болѣе половины всѣхъ цыфръ корня, то остальныя его цыфры найдутся дѣленіемъ остатка на удвоенную найденную часть корня.*

Положимъ, что цѣлая часть $\sqrt{N}$ стостоитъ изъ $2n+1$ цыфръ, и первыя $n+1$ цыфръ найдены; остается найти послѣднія n цыфръ. Назовемъ черезъ a найденную часть корня, т.-е. число, изображенное первыми $n+1$ цыфрами корня съ n нулями на концѣ; если, напр., найдены цыфры: 4567 и остается еще найти три цыфры, то a означаетъ 4567000. Пусть x означаетъ число, которое надо приложить къ a, чтобы получить точную величину корня. Тогда:

$$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

Откуда: $$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a} \qquad [A]$$

Такъ какъ въ цѣлой части x должно быть n цыфръ, то $x<10^n$ и $x^2<10^{2n}$; такъ какъ a состоитъ изъ $n+1$ значащихъ цыфръ, сопровождаемыхъ n нулями, то $a>10^{2n}$. Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{x^2}{a}$ есть правильная дробь, и потому $\frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2}$.

Вслѣдствіе этого, изъ равенства [A] находимъ, что x отличается отъ частнаго $\frac{N-a^2}{2a}$ *менѣе, чѣмъ на* $1/_2$, и потому, взявъ за x цѣлое число, заключающееся въ этомъ частномъ, сдѣлаемъ ошибку *менѣе чѣмъ на 1.*

Такъ какъ $N-a^2$ есть остатокъ, полученный послѣ нахожденія $n+1$ цыфръ корня (взятый со всѣми еще не снесенными гранями), а $2a$ есть удвоенная найденная часть корня, то теорема доказана.

Примѣръ: пусть мы нашли первыя 4 цыфры квадратнаго корня изъ 35,72,08,00,00,00,00, а именно: 5976, и при этомъ получили остатокъ 3224.

Чтобы найти остальныя три цыфры, сносимъ къ остатку послѣднія три грани и дѣлимъ полный остатокъ 8224000000, на 2.5976000 т.-е. на 11952000; находимъ въ частномъ 688; это и будутъ послѣднія три цыфры корня.

Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней.

158. Теорема 1. *Если цѣлое число не есть квадратъ другого цѣлаго числа, то оно не можетъ быть и квадратомъ дроби.*

Пусть N есть такое цѣлое число, которое не равно квадрату никакого цѣлаго числа; требуется доказать, что оно не можетъ быть и квадратомъ дроби. Предположимъ противное: пусть нѣкоторая *несократимая* дробь $\frac{a}{b}$, будучи возвышена въ квадратъ, даетъ число N, т.-е.

$$N=\left(\frac{a}{b}\right)^2; \text{ откуда: } N=\frac{a^2}{b^2}$$

Послѣднее равенство возможно только тогда, когда a^2 *дѣлится* на b^2; но этого не можетъ быть, такъ какъ числа a и b не имѣютъ общихъ множителей. Слѣдовательно, число N не можетъ быть квадратомъ дроби.

Теорема 2. *Если числитель или знаменатель несократимой ариѳметической дроби не представляютъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ, то такая дробь не можетъ быть квадратомъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа.*

Пусть $\frac{a}{b}$ есть такая несократимая дробь, у которой или a, или b, или оба эти числа, не суть квадраты цѣлыхъ чиселъ. Дробь не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа, потому что цѣлое число въ квадратѣ даетъ тоже цѣлое число, а не дробное. Предположимъ, что $\frac{a}{b}$ есть квадратъ нѣкоторой дроби, которая, по сокращеніи, пусть будетъ $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{a}{b}, \text{ т.-е. } \frac{p^2}{q^2}=\frac{a}{b}$$

Но двѣ несократимыя дроби могутъ равняться другъ другу только тогда, когда равны ихъ числители между собою и знаменатели между собою. Поэтому изъ написаннаго выше равенства выводимъ:

$$p^2=a \text{ и } q^2=b .$$

Но этого быть не можетъ, такъ какъ, по условію, a или b не суть квадраты. Значитъ, нельзя допустить, чтобы данная дробь была квадратомъ другой дроби.

Числа, изъ которыхъ квадратный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. *точными* квадратами; всѣ остальныя числа могутъ быть названы *неточными* квадратами.

Изъ неточныхъ квадратовъ можно извлекать только *приближенные* квадратные корни.

159. Опредѣленіе приближеннаго корня. 1) *Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго* (цѣлаго или дробнаго) *числа съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя различаются одно отъ другого на 1 и между квадратами которыхъ заключается данное число;* меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ *съ недостаткомъ*, а большее—приближеннымъ корнемъ *съ избыткомъ*.

Напр., приближенный квадратный корень изъ $56^1/_2$ съ точностью до 1 есть или 7, или 8, потому что эти цѣлыя числа различаются на 1 и между квадратами ихъ заключается $56^1/_2$, такъ какъ $7^2=49$, а $8^2=64$ и слѣд.:

$$7^2<56\frac{1}{2}<8^2$$

2) *Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго* (цѣлаго или дробнаго) *числа съ точностью до $^1/_n$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ* n, *которыя различаются одна отъ другой на $^1/_n$ и между квадратами которыхъ заключается данное число;* меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ *съ недостаткомъ*, а большая—приближеннымъ корнемъ *съ избыткомъ*.

Напр., приближенный квадратный корень изъ 27,5 съ точностью до $^1/_{10}$ есть или 5,2 или 5,3, потому что эти дроби, имѣя знаменателя 10, различаются на $^1/_{10}$ и между квадратами ихъ заключается 27,5, такъ какъ $5{,}2^2=27{,}04$ и $5{,}3^2=28{,}09$ и слѣд.:

$$5{,}2^2<27{,}5<5{,}3^2$$

160. Правило 1. *Чтобы найти приближенный квадратный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, достаточно извлечь квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.*

Дѣйствительно, пусть, напр., требуется найти приближенный квадратный корень съ точностью до 1 изъ $150^3/_7$. Для этого извлечемъ квадр. корень изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключающагося въ 150; это будетъ 12. Такъ какъ $12^2<150$, то и подавно $12^2<150^3/_7$; съ другой стороны, $13^2>150$, и такъ какъ $^3/_7$ не составляютъ цѣлой единицы, то $13^2>150^3/_7$; кромѣ того, разность между 13 и 12 есть 1; отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ этихъ двухъ чиселъ есть приближенный квадратный корень изъ $150^3/_7$ съ точностью до 1, при чемъ 12 есть приближенный корень *съ недостаткомъ*, а 13—приближенный корень *съ избыткомъ*.

Примѣры:

1) $\sqrt{5}=2$ или 3 2) $\sqrt{5,375}=2$ или 3

3) $\sqrt{\frac{487}{13}}=\sqrt{37\frac{6}{13}}=6$ или 7; 4) $\sqrt{\frac{5}{6}}=0$ или 1

Правило 2. *Чтобы найти приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до* $\frac{1}{n}$, *достаточно умножить данное число на* n^2, *изъ полученнаго произведенія извлечь квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и раздѣлить его на* n.

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ даннаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Тогда, по опредѣленію, имѣемъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2<A<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 \text{ или: } \frac{x^2}{n^2}<A<\frac{(x+1)^2}{n^2}$$

Умноживъ всѣ члены неравенства на n^2, получимъ:

$$x^2<An^2<(x+1)^2$$

Изъ этихъ неравенствъ видно, что числа x и $x+1$ суть приближенные квадр. корни *съ точностью до* 1 изъ произведенія An^2. Найдя эти корни такъ, какъ было показано

раньше, получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ ихъ на n, найдемъ и самыя дроби.

Примѣры: 1) *Найти* $\sqrt{72}$ *съ точностью до* $^1/_7$:

$$72.7^2=72.49=3528$$

$$\sqrt{3528}=59 \text{ (до 1)}; \ \sqrt{72}=\frac{59}{7} \text{ (до } \frac{1}{7})$$

2) *Найти* $\sqrt{2}$ *до сотыхъ долей:*

$2.100^2=20000$; $\sqrt{20000}=141$ (до 1); $\sqrt{2}=1,41$ (до $^1/_{100}$)

3) *Найти* $\sqrt{^3/_7}$ *съ приближеніемъ до* $^1/_{10000}$:

$\frac{3}{7}.\ 1000^2=\frac{3000000}{7}=428571\frac{3}{7}$; $\sqrt{428571}=654$; $\sqrt{\frac{3}{7}}=0,654$

4) *Найти* $\sqrt{0,3}$ *до* $^1/_{100}$:

$0,3,100^2=3000$; $\sqrt{3000}=54$; $\sqrt{0,3}=0,54$ (до $^1/_{100}$).

5) *Найти* $\sqrt{0,38472}$ *до* $^1/_{10}$:

$0,38472.10^2=38,472$; $\sqrt{38}=6$; $\sqrt{0,38472}=0,6$ (до $^1/_{10}$).

6) *Найти* $\sqrt{465}$ *съ какимъ-нибудь десятичнымъ приближеніемъ:*

```
 √4,65=21,56
   4
 ------
   41|65
    1|41
 ---------
  425|2400
    5|2125
 ----------
 4306|27500
    6|25836
 ----------
       1664
```

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1; получаемъ 21. Чтобы найти цыфру десятыхъ (иначе сказать, чтобы найти приближенный корень до $^1/_{10}$), надо было бы умножить 465 на 10^2, т.-е. приписать къ 465 два нуля. Очевидно, это все равно, что приписать *къ остатку* два нуля. Найдя цыфру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку 2 нуля и искать цыфру сотыхъ и т. д.

Извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей.

161. Точный квадратный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби суть точные квадраты (§ 158, теор. 2). Въ этомъ случаѣ

достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$$

Приближенные квадратные корни изъ дробей находятся обыкновенно такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. примѣры 3, 4, и 5). Впрочемъ, можно поступить и иначе. Объяснимъ это на примѣрахъ:

1) Найти приближенное значенiе $\sqrt{\frac{5}{24}}$

Сдѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменателя; но въ этомъ примѣрѣ можно поступить проще. Разложимъ знаменателя на простыхъ множителей: $24=2.2.2.3$. Изъ этого разложенiя видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, тогда въ произведенiи каждый простой множитель будетъ повторяться *четное* число разъ, и, слѣд., знаменатель сдѣлается квадратомъ; поэтому:

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2.2.2.3}}=\sqrt{\frac{5.2.3}{2^4.3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2.3}=\frac{\sqrt{30}}{12}$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ съ какою-нибудь точностью и результатъ раздѣлить на 12. При этомъ надо имѣть въ виду, что отъ дѣленiя на 12 уменьшится и дробь $^1/_n$, показывающая степень точности. Такъ, если найдемъ $\sqrt{30}$ съ точностью до $^1/_{10}$, то получимъ 5,4 (съ нед.) и 5,5 (съ избыткомъ). Раздѣливъ эти числа на 12, найдемъ $^{54}/_{120}$ (съ нед.) и $^{55}/_{120}$ (съ изб.). Это будутъ приближенные корни изъ дроби $^5/_{24}$ съ точностью до $^1/_{120}$.

2) Найти приближенное значенiе $\sqrt{0,378}$.

$$\sqrt{0,378}=\sqrt{\frac{378}{1000}}=\sqrt{\frac{3780}{10000}}=\frac{\sqrt{3780}}{100}=\frac{61}{100}\text{ или }\frac{62}{100}\left(\text{до }\frac{1}{100}\right).$$

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

162. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ квадратный корень изъ многочлена можетъ быть выраженъ въ видѣ раціональнаго многочлена. Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+\frac{1}{4}b^6}$$

Мы расположили данный многочленъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ есть первый, а низшій—послѣдній.

Предположимъ, что существуетъ раціональный многочленъ, квадратъ котораго равенъ данному многочлену. Пусть этотъ многочленъ тоже расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ первый.

Мы знаемъ, что квадратъ многочлена=квадрату 1-го члена+удвоенное произведеніе 1-го чл. на 2-й+квадратъ 2-го члена+удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й+квадратъ 3-го члена и т. д. Если возвышаемый многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то очевидно, что *высшій* членъ въ квадратѣ этого многочлена есть квадратъ *перваго* его члена. Въ подкоренномъ многочленѣ высшій членъ есть $16a^4b^2$; значитъ, это и есть квадратъ 1-го члена искомаго многочлена; по этому 1-й членъ корня$=\sqrt{16a^4b^2}=\pm 4a^2b$.

Такимъ образомъ, *чтобы найти 1-й членъ корня, достаточно извлечь квадр. корень изъ перваго члена подкоренного многочлена* (предварительно расположеннаго). Изъ найденныхъ двухъ значеній перваго члена возьмемъ пока одно: $+4a^2b$, а впослѣдствіи примемъ во вниманіе и другое.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+{}^1/_4b^6}=4a^2b-3ab^2+{}^1/_2b^3 \\
 & -16a^4b^2 \\
\hline
8a^2b-3ab^2 & \text{„}\ -24a^3b^3+13a^2b^4 \ldots \text{ первый остатокъ.} \\
-3ab^2 & \text{„}\ +24a^3b^3-\ 9a^2b^4 \\
\hline
8a^2b-6ab^2+{}^1/_2b^3 & \text{„}\ \ +\ 4a^2b^4-3ab^5+{}^1/_4b^6 \ldots \text{ второй остат.} \\
{}^1/_2b^3 & \text{„}\ \ -\ 4a^2b^4+3ab^5-{}^1/_4b^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Найдя первый членъ корня ($4a^2b$), возвысимъ его въ квадратъ и вычтемъ изъ подкореннаго многочлена. Въ остаткѣ (первомъ) должны получиться всѣ члены многочлена, кромѣ перваго. Мы написали только 2 члена остатка, потому что остальные пока не нужны. Въ этомъ первомъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведенiе 1-го члена на 2-й+квадратъ второго члена+удвоенное произведенiе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й+квадратъ 3-го и т. д. Изъ всѣхъ этихъ членовъ высшiй будетъ удвоенное произведенiе 1-го чл. на 2-й, а въ остаткѣ высшiй членъ есть $-24a^3b^3$; слѣд., $-24a^3b^3$ и есть удвоенное произведенiе 1-го члена на 2-й. А потому, *чтобы найти 2-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня.*

Для этого налѣво отъ остатка (или направо отъ него) проводимъ вертикальную черту: за нею пишемъ удвоенный первый членъ корня ($8a^2b$). Раздѣливъ $-24a^3b^3$ на $8a^2b$, получимъ одночленъ $-3ab^2$, который и записываемъ въ корнѣ на мѣстѣ второго члена, и вмѣстѣ съ тѣмъ приписываемъ его за вертикальной чертой къ удвоенному первому члену (получаемъ за чертой $8a^2b-3ab^2$). Это дѣлается для того, чтобы, умноживъ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, заразъ получить: удвоенное произведенiе 1-го члена на 2-й и квадратъ 2-го члена. Умноживъ на самомъ дѣлѣ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, пишемъ произведенiе подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемаго многочлена на обратные); получимъ второй остатокъ: $+4a^2b^4-3ab^5+{}^1/_4b^6$.

Во второмъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведенiе суммы первыхъ двухъ членовъ корня на 3-й чл.+квадратъ 3-го члена и т. д.; другими словами: удвоенное произведенiе 1-го чл. на 3-й+удвоенное произведенiе 2-го члена на 3-й+квадратъ 3-го чл. и т. д. Изъ всѣхъ этихъ членовъ высшiй есть удвоенное произведенiе 1-го члена на 3-й; а въ остаткѣ высшiй членъ есть $+4a^2b^4$. Значитъ, $4a^2b^4$ и есть удвоенное произведенiе 1-го члена корня на 3-й его членъ. Поэтому, *чтобы найти 3-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ второго остатка на удвоенный 1-й членъ корня.*

Пишемъ $8a^2b$ за вертикальною чертою и дѣлимъ на это количество $4a^2b^4$, получаемъ $+\frac{1}{2}b^3$; пишемъ этотъ результатъ въ корнѣ на мѣстѣ 3-го члена. Теперь намъ нужно составить удвоенное произведенiе 1-го чл. на 3-й + удвоенное произведенiе 2-го чл. на 3-й + квадратъ 3-го члена и полученную сумму вычесть изъ второго остатка. Чтобы удобнѣе найти эту сумму, къ удвоенному 1-му члену припишемъ (за вертикальной чертой) удвоенный 2-й членъ и еще 3-й членъ корня (получимъ $8a^2b-6ab^2+\frac{1}{2}b^3$) и образовавшiйся отъ этого многочленъ умножимъ на 3-й чл., т.-е. на $\frac{1}{2}b^3$; полученное произведенiе подписываемъ подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣнимъ знаки у вычитаемаго многочлена).

Въ нашемъ примѣрѣ 3-й остатокъ оказался 0; если бы получился остатокъ, не равный 0, то мы продолжали бы дѣйствiе далѣе, разсуждая такъ, какъ и раньше.

Для перваго члена искомаго корня мы взяли лишь одно значенiе $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и $-4a^2b$; въ этомъ случаѣ остальные члены корня тоже перемѣнили бы знаки на обратные, потому что для полученiя ихъ пришлось бы дѣлить первые члены остатковъ не на $8a^2b$ а на $-8a^2b$. Значитъ, квадратный корень изъ многочлена имѣетъ два значенiя; въ нашемъ примѣрѣ одно $=4a^2b-3ab^2+\frac{1}{2}b^3$, другое $=-4a^2b+3ab^2-\frac{1}{2}b^3$; оба эти значенiя можно выразить такъ:

$$\pm(4a^2b-3ab^2+\frac{1}{2}b^3).$$

Мы могли бы подкоренный многочленъ расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно такъ же, какъ сейчасъ было объяснено; только въ объясненiи слово „высшiй“ должно замѣнить словомъ „низшiй“.

163. **Правило.** Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, предварительно располагаютъ его по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы.

Извлекаютъ квадратный корень изъ 1-го члена многочлена; полученный результатъ есть 1-й членъ корня.

Возвысивъ этотъ членъ въ квадратъ, вычитаютъ его изъ даннаго многочлена.

Дѣлятъ 1-й членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня; полученное частное есть 2-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ удвоенному 1-му члену корня, умножаютъ полученный двучленъ на 2-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ остатка.

Дѣлятъ 1-й членъ 2-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня; полученное частное есть 3-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ суммѣ удвоеннаго 1-го чл. и удвоеннаго 2-го чл., умножаютъ полученный трехчленъ на 3-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ 2-го остатка.

Продолжаютъ дѣйствіе такъ же и далѣе.

164. Признаки невозможнаго извлеченія: 1) Если данный многочленъ есть двучленъ, то корень квадратный изъ него не можетъ быть выраженъ раціонально (т.-е. безъ знака радикала), такъ какъ всякій многочленъ въ квадратѣ даетъ по меньшей мѣрѣ 3 члена, а не 2.

2) Если высшій или низшій члены многочлена неточные квадраты, то корень квадратный изъ многочлена не можетъ быть выраженъ раціонально.

Это прямо слѣдуетъ изъ правила нахожденія высшаго и низшаго члена корня.

3) Если высшій и низшій члены многочлена суть точные квадраты, то возможность или невозможность извлеченія корня обнаружится посредствомъ самаго дѣйствія; при этомъ если многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0, или пока не получится остатокъ, у котораго первый членъ не дѣлится на удвоенный первый членъ корня; въ послѣднемъ случаѣ извлеченіе невозможно. Если же многочленъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то, вычисливъ предварительно послѣдній членъ корня (который равенъ корню квадр. изъ послѣдняго члена многочлена), продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ корнѣ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю этой буквы въ вычисленномъ послѣднемъ членѣ корня; если при этомъ есть остатокъ, то извлеченіе невозможно.

165. Замѣчаніе. Когда изъ даннаго многочлена нельзя извлечь точнаго квадратнаго корня, все-таки иногда бываетъ полезно начать извлеченіе съ тѣмъ, чтобы, прекративъ его на какомъ-нибудь членѣ корня, **представить данный многочленъ въ видѣ суммы квадрата съ остаткомъ отъ извлеченія.** Напр.:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{x^4-4x^3+3}=x^2-2x \\
 & -x^4 \\
\hline
2x^2-2x & \;\text{„}\quad -4x^3+3 \\
-2x & \;\text{„}\quad +4x^3-4x^2 \\
\hline
 & \qquad -4x^2+3
\end{array}
$$

Прекративъ извлеченіе на второмъ членѣ корня, можемъ написать:

$$x^4-4x^3+3=(x^2-2x)^2+(-4x^2+3)=(x^2-2x)^2-4x^2+3$$

ГЛАВА V.

Извлеченіе кубичнаго корня.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ.

166 Предварительныя замѣчанія. 1) Если возвысимъ въ кубъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4, 5..., то получимъ безконечный рядъ кубовъ:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр. 500), не можетъ быть кубомъ цѣлаго числа.

Пусть намъ дано какое-нибудь цѣлое число, напр. 56842, и требуется изъ него извлечь кубичный корень. Допустимъ, что мы не знаемъ, находится ли это число въ рядѣ кубовъ цѣлыхъ чиселъ, и потому заранѣе не знаемъ, можно ли изъ него извлечь цѣлый корень. Въ такихъ случаяхъ условимся, что извлечь кубичный корень изъ даннаго числа значитъ извлечь его или изъ самаго числа (если оно окажется кубомъ цѣ

лаго числа), или же изъ *наибольшаго* куба цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

2) Замѣтимъ еще, что легко опредѣлить заранѣе, сколько будетъ цыфръ въ искомомъ корнѣ. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$$1^3=1 \qquad 10^3=1000 \qquad 100^3=1000000$$
$$1000^3=1000000000 \text{ и т. д.}$$

Пусть, напр., требуется найти $\sqrt[3]{571810}$. Такъ какъ подкоренное число меньше 1000000, то и наибольшій кубъ, заключающійся въ немъ, меньше 100^3; съ другой стороны, такъ какъ подкоренное число больше 1000, то наибольшій кубъ, заключающійся въ немъ, больше (или равенъ) 10^3. Значитъ, кубичный корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 571810, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цыфръ.

167. Свойство числа десятковъ корня. Если данное число меньше 1000, то кубичный корень изъ него выражается одною цыфрою и потому легко находится по таблицѣ кубовъ первыхъ 9-ти чиселъ (ее надо заучить). Если данное число болѣе 1000, то кубичный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10-ти и, слѣд., состоитъ изъ 2-хъ или болѣе цыфръ. Изъ сколькихъ бы цыфръ онъ ни состоялъ, мы условимся разсматривать его, какъ сумму только *десятковъ* и *единицъ*.

Пусть требуется извлечь куб. корень изъ какого-нибудь числа, напр., изъ числа 571810. Предположимъ, что въ искомомъ корнѣ десятковъ будетъ x (число это можетъ быть однозначное или многозначное, все равно), а единицъ y; тогда искомый корень выразится $10x+y$, и слѣдовательно:

$$571810=(10x+y)^3+\text{ост.}=1000x^3+3.100x^2y+3.10xy^2+y^3+\text{ост.}$$

Чтобы найти число x, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенства однѣ только тысячи. Въ лѣвой части этого равенства находится 571 тысяча, а въ правой тысячъ или x^3, или болѣе (если тысячи окажутся въ суммѣ остальныхъ членовъ), поэтому:

$$571 \geqslant x^3.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что x^3 есть одинъ изъ цѣлыхъ кубовъ, заключающихся въ 571. Докажемъ, что за x^3 надо взять *наибольшій* изъ этихъ кубовъ, т.-е. 512. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы взяли за x^3 не 512, а, положимъ, 343, то x равнялся бы 7, а потому искомый корень былъ бы 7 десятковъ съ единицами. Но 7 десятковъ съ единицами (хотя бы единицъ было и 9) меньше 8-ми десятковъ, а 8 десятковъ въ кубѣ составляютъ только 512 тысячъ, что меньше даннаго числа; поэтому мы не можемъ взять 7-ми десятковъ съ единицами, когда и 8-ми десятковъ оказывается не много.

Если же $x^3 = 512$, то $x = \sqrt[3]{512} = 8$. Отсюда слѣдуетъ: *число десятковъ искомаго корня равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.*

Когда данное число, какъ взятое нами, меньше 1000000, тогда число тысячъ въ немъ меньше 1000; въ этомъ случаѣ десятки корня легко находятся по таблицѣ кубовъ первыхъ 9-и чиселъ.

168. Свойства числа единицъ корня. Найдя десятки корня, вычислимъ членъ $1000x^3$ и вычтемъ изъ даннаго числа; тогда получимъ *первый остатокъ*. Чтобы найти его, достаточно вычесть x^3, т.-е. 512, изъ 571 и къ остатку снести остальныя три цыфры:

$$\begin{array}{r} 571810 \\ -512 \\ \hline 59810 \end{array} = 3.100x^2y + 3.10xy^2 + y^3 + \text{ост.}$$

Чтобы найти y, возьмемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ 598, а въ правой $3x^2y$ или больше (если сотни окажутся въ суммѣ послѣднихъ трехъ членовъ); поэтому:

$$598 \geqslant 3x^2y; \text{ откуда } y \leqslant \frac{598}{3x^2}$$

т.-е. *число единицъ корня равно или меньше цѣлаго частнаго отъ дѣленія числа сотенъ перваго остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня.*

Подставивъ вмѣсто x найденное для него число 8, получимъ:

$$y \leqslant \frac{598}{3.8^2} = \frac{598}{192} = 3\ \frac{22}{192}$$

Отсюда видно, что y есть или 3, или 2, или 1, или 0. Чтобы опредѣлить, какое изъ этихъ чиселъ надо взять за y, испытаемъ сначала большую цыфру, т.-е. 3. Для этого вычислимъ сумму членовъ: $3.100x^2y+3.10xy^2+y^3$ при $x=8$ и $y=3$; если получится число, не большее перваго остатка 59810, то испытуемая цыфра годится; въ противномъ случаѣ надо испытать слѣдующую меньшую цыфру:

$$\begin{array}{r} 3x^2y.100=3.64.3.100=57600 \\ 3xy^2.\ 10=3.\ 8.9.\ 10=\ 2160 \\ y^3=3^3..........=\ \ \ \ 27 \\ \hline 59787 \end{array}$$

Испытуемая цыфра годится. Искомый корень 83. Чтобы найти окончательный остатокъ отъ извлеченія, надо изъ 59810 вычесть 59787; вычтя, получимъ 23; вслѣдствіе чего можно написать:

$$571810=83^3+23$$

Вычисляя члены $3x^2y$. 100 и $3xy^2$. 10, мы можемъ не писать на концѣ нулей, а только, при подписываніи слагаемыхъ другъ подъ другомъ, имѣть въ виду, что произведеніе $3x^2y$ означаетъ сотни, а $3xy^2$—десятки.

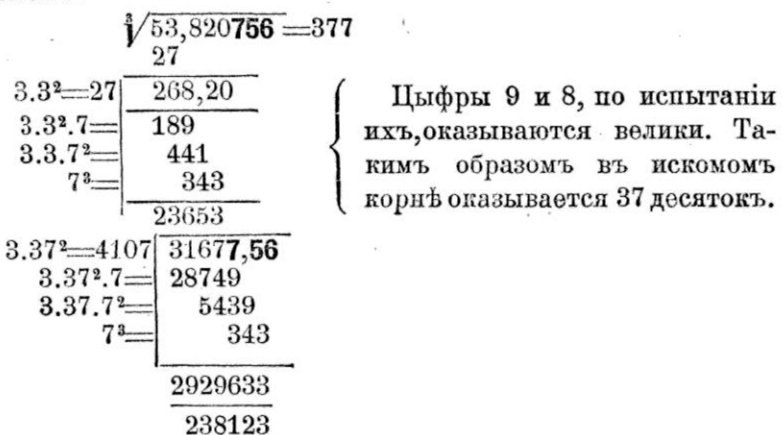
169. Расположеніе дѣйствія. На практикѣ извлеченіе куб. корня располагается обыкновенно по слѣдующему **правилу:**

	$\sqrt[3]{571,810}=83$
	512
$3.8^2=192$	598,10
$3.8^2.3=$	576
$3.8.3^2=$	216
$2^3=$	27
	59787
	23

отдѣливъ въ данномъ числѣ тысячи (571), извлекаютъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ ихъ. Полученное число пишутъ въ корнѣ; это будутъ десятки искомаго корня. Возвысивъ найденное число въ кубъ, вычитаютъ результатъ изъ числа тысячъ даннаго числа, къ остатку (59) сносятъ остальныя три цыфры подкоренного числа. Отдѣляютъ въ этомъ остаткѣ

сотни; налѣво отъ него проводятъ вертикальную черту, за которой пишутъ утроенный квадратъ числа десятковъ корня. На это число дѣлятъ сотни остатка. Полученную цыфру (3) подвергаютъ испытанію. Для этого вычисляютъ отдѣльно три слагаемыя: утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ и кубъ единицъ. Подписавъ эти слагаемыя другъ подъ другомъ (причемъ второе и третье сдвигаютъ на одно мѣсто вправо), находятъ ихъ сумму (59787). Если эта сумма оказывается не болѣе остатка, то ее вычитаютъ изъ него; въ противномъ случаѣ подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру.

170. Извлеченіе куб. корня изъ чиселъ, большихъ 1000000. Пусть требуется извлечь кубичный корень изъ числа, большаго милліона, напр., изъ 53820756. Чтобы найти десятки корня, надо, по доказанному, извлечь куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа, т.-е. въ 53820. Такъ какъ это число менѣе 1000000, то корень изъ него найдемъ описаннымъ ранѣе пріемомъ:



Чтобы найти единицы корня, надо, по доказанному прежде, найти предварительно первый остатокъ, т.-е. изъ даннаго числа вычесть кубъ десятковъ, $37^3.1000$. Для этого достаточно изъ 53820 вычесть 37^3 и къ остатку приписать по-

слѣднія три цыфры даннаго числа, т.-е. 756. Остатокъ отъ вычитанія 37^3 изъ 53820 у насъ уже есть, именно 3167. Припишемъ къ этому числу цыфры 756; получимъ остатокъ 3167756 отъ вычитанія $37^3 . 1000$ изъ всего даннаго числа. Отдѣлимъ въ этомъ остаткѣ сотни и раздѣлимъ число ихъ на 3.37^2; тогда получимъ, по доказанному, число, или равное числу единицъ корня, или большее его. Испытаніемъ убѣдимся, какая цыфра будетъ надлежащая. Дѣйствіе можно продолжать тамъ же, гдѣ мы находили десятки корня.

Вообще, чтобы извлечь куб. корень изъ какого угодно большого числа, надо сначала извлечь кубичный корень изъ числа его тысячъ. Если это число болѣе 1000, то придется извлекать куб. корень изъ числа тысячъ этихъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа; если и это число болѣе 1000, то придется извлекать корень изъ числа тысячъ милліоновъ, т.-е. изъ билліоновъ даннаго числа, и т. д. Другими словами, данное число придется *разбить на грани, отъ правой руки къ лѣвой, по три цыфры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одна или двѣ цыфры*. Чтобы найти первую цыфру корня, надо извлечь куб. корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цыфру, надо изъ первой грани вычесть кубъ первой цыфры корня, къ остатку снести вторую грань и число сотенъ получившагося числа раздѣлить на утроенный квадратъ найденной цыфры корня; полученное отъ дѣленія число надо испытать. Слѣдующія цыфры корня находятся по тому же пріему.

Если послѣ снесенія грани число сотенъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. утроеннаго квадрата найденной части корня, то въ корнѣ ставятъ нуль и сносятъ слѣдующую грань.

171. Число цыфръ корня. Изъ разсмотрѣнія способа нахожденія кубичнаго корня слѣдуетъ, что въ корнѣ столько цыфръ, сколько въ подкоренномъ числѣ граней по три цыфры каждая, кромѣ послѣдней, которая можетъ имѣть и двѣ цыфры, и одну.

172. Теорема. *Когда найдено двумя цыфрами болѣе половины всѣхъ цыфръ корня, то остальныя его цыфры найдутся дѣленіемъ остатка на утроенный квадратъ найденной части корня.*

Положимъ, что цѣлая часть $\sqrt[3]{N}$ состоитъ изъ $2n+2$ цыфръ и что первыя $n+2$ цыфры его уже найдены; остается найти послѣднія n цыфръ. Назовемъ черезъ a найденную часть корня, т.-е. число, изображенное первыми $n+2$ цыфрами корня съ n нулями на концѣ; если, напр., найдены цыфры 45678 и остается найти еще 3 цыфры, то a будетъ означать число 45678000. Пусть x означаетъ число, которое надо приложить къ a, чтобы получить точную величину корня. Тогда:

$$N=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

$$\text{Откуда: } \frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2} \qquad [A]$$

Легко доказать, что сумма $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<\frac{1}{2}$.

Дѣйствительно, такъ какъ $x<10^n$, то $x^2<10^{2n}$ и $x^3<10^{3n}$; съ другой стороны, $a>10^{2n+1}$ и $a^2>10^{4n+2}$; слѣд., $\frac{x^2}{a}<\frac{1}{10}$ и $\frac{x^3}{a^2}<\frac{1}{10^{n+2}}$; отсюда очевидно, что $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}<\frac{1}{2}$.

Вслѣдствіе этого, изъ равенства [A] находимъ, что x отличается отъ частнаго $\frac{N-a^3}{3a^2}$ *менѣе, чѣмъ на* $1/2$, и потому, взявъ за x цѣлое число, заключающееся въ этомъ частномъ, сдѣлаемъ ошибку *менѣе, чѣмъ на 1.*

Извлеченіе приближенныхъ кубичныхъ корней.

173. Теорема 1. *Если цѣлое число не есть кубъ другого цѣлаго числа, то оно не можетъ быть и кубомъ дроби.*

Пусть N есть цѣлое число, не равное кубу цѣлаго числа; требуется доказать, что оно не можетъ быть и кубомъ дроби. Предположимъ противное: пусть нѣкоторая *несократимая* дробь $\frac{a}{b}$, будучи возвышена въ кубъ, даетъ число N, т.-е.

$$N=\left(\frac{a}{b}\right)^3, \text{ откуда: } N=\frac{a^3}{b^3}$$

Такое равенство возможно только тогда, когда a^3 дѣлится на b^3; но этого не можетъ быть, такъ какъ числа a и b не имѣютъ общихъ множителей. Слѣд., число N не можетъ быть кубомъ дроби.

Теорема 2. *Если числитель или знаменатель несократимой ариѳметической дроби не представляютъ собою кубовъ*

цѣлыхъ чиселъ, то такая дробь не можетъ быть кубомъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа.

Пусть $\frac{a}{b}$ есть такая несократимая дробь, у которой или a, или b, или оба эти числа не суть кубы цѣлыхъ чиселъ. Предположимъ, что $\frac{a}{b}$ есть кубъ нѣкоторой несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3=\frac{p^3}{q^3}=\frac{a}{b}$$

Такъ какъ дроби $\frac{p^3}{q^3}$ и $\frac{a}{b}$ несократимы, то ихъ равенство возможно только тогда, когда у нихъ равны числители между собою и знаменатели между собою:

$$p^3=a \text{ и } q^3=b$$

Но это невозможно, такъ какъ, по условію, a или b не суть кубы цѣлыхъ чиселъ.

Съ другой стороны очевидно, что дробь не можетъ быть кубомъ и цѣлаго числа; слѣд., теорема доказана.

Числа, изъ которыхъ кубичный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. *точными* кубами; всѣ остальныя числа могутъ быть названы *неточными* кубами.

Изъ неточныхъ кубовъ можно извлекать только *приближенные* кубичные корни.

174. Опредѣленіе приближеннаго кубичнаго корня. 1) *Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа* (цѣлаго или дробнаго) *съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на 1;* меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ *съ недостаткомъ*, а большее—приближеннымъ корнемъ *съ избыткомъ*.

Такъ, если A есть данное число, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до 1 будутъ два такія цѣлыя числа x и $x+1$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$x^3<A<(x+1)^3$$

2) *Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа* (цѣлаго или дробнаго) *съ точностью до* $\frac{1}{n}$ *наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ* n, *между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одна отъ другой на* $\frac{1}{n}$; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ *съ недостаткомъ*, а большая приближеннымъ корнемъ *съ избыткомъ*.

Такъ, если данное число есть A, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ двѣ такія дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3$$

175. Правило 1. *Чтобы найти приближенный куб. корень съ недостаткомъ съ точностью до 1, достаточно извлечь куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.*

Пусть, напр., требуется найти приближенный куб. корень съ точностью до 1 изъ числа 500,6. Для этого находимъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 500; это есть 7. Такъ какъ $7^3 < 500$, то, и подавно, $7^3 < 500{,}6$; съ другой стороны, $8^3 > 500$, и такъ какъ 0,6 не составляютъ ни одной цѣлой единицы, то $8^3 > 500{,}6$. Слѣд., каждое изъ чиселъ: 7 или 8, есть приближенный куб. корень съ точностью до 1 изъ числа 500,6; первое есть приближенный куб. корень съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ.

Примѣры: 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0$ или 1; 2) $\sqrt[3]{560^7/_8} = 8$ или 9;

2) $\sqrt[3]{\frac{3846}{17}} = \sqrt[3]{226\frac{4}{17}} = 6$ или 7.

Правило 2. *Чтобы найти приближенный куб. корень съ недостаткомъ съ точностью до* $\frac{1}{n}$, *достаточно умножить*

данное число на n^3, *изъ полученнаго произведенія извлечь куб. корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и раздѣлить его на* n.

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ даннаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Тогда, по опредѣленію, имѣемъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3 \text{ или } \frac{x^3}{n^3} < A < \frac{(x+1)^3}{n^3}$$

Откуда: $$x^3 < An^3 < (x+1)^3$$

Изъ этого неравенства видно, что числа x и $x+1$ суть приближенные кубичные корни изъ числа An^3, съ точностью до 1. Найдя эти корни такъ, какъ было указано ранѣе, получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ ихъ на n, найдемъ и самыя дроби.

Примѣры: 1) *Найти* $\sqrt[3]{5}$ *съ точностью до* $^1/_8$.

$5.8^3 = 2560$; $\sqrt[3]{2560} = 13$ или 14; $\sqrt[3]{5} = \frac{13}{8}$ или $\frac{14}{8}$ (до $^1/_8$).

2) *Найти* $\sqrt[3]{^4/_9}$ *до сотыхъ долей.*

$^4/_9 . 100^3 = 444444\,^4/_9$; $\sqrt[3]{444444} = 76$ или 77; $\sqrt[3]{^4/_9} = 0{,}76$ или $0{,}77$.

3) *Найти* $\sqrt[3]{2}$ *съ десятичнымъ приближеніемъ:*

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25\ldots$

	1
$3.1^2=3$	10,00
$3.1^2.2=$	6
$3.1.2^2=$	12
$2^3=$	8
	728
$3.12^2=432$	2720,00
$3.12^2.5=$	2160
$3.12.5^2=$	900
$5^3=$	125
	225125
	46875

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1; это будетъ 1. Чтобы найти цыфру десятыхъ, надо было бы умножить 2 на 10^3, т.-е. къ 2 приписать три нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку три нуля. Найдя цыфру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку три нуля и искать цыфру сотыхъ, и т. д.

Извлеченіе кубичныхъ корней изъ дробей.

176. Точный кубичный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби точные кубы (§ 173). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно, напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}$$

Приближенные куб. корни изъ дробей обыкновенно находятся такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (примѣръ 2). Впрочемъ, можно поступать иначе. Объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

Найти приближенное значеніе $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$.

Изъ разложенія: $24=2.2.2.3$ видимъ, что если оба члена дроби умножимъ на 3^2, то сдѣлаемъ знаменателя точнымъ кубомъ; сдѣлавъ это, извлечемъ корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{24}}=\sqrt[3]{\frac{5.3^2}{24.3^2}}=\sqrt[3]{\frac{45}{2^3.3^3}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{2.3}=\frac{\sqrt[3]{45}}{6}$$

Найдя $\sqrt[3]{45}$ съ какою-нибудь точностью до $1/n$ и раздѣливъ результатъ на 6, мы получимъ приближенный куб. корень изъ дроби $5/24$ съ точностью до $1/6n$.

ГЛАВА VI.

Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ.

177. Общая мѣра. *Общею мѣрой двухъ значеній одной и той же величины наз. такое значеніе этой же величины, которое въ каждомъ изъ нихъ содержится цѣлое число разъ.*

Два значенія величины наз. *соизмѣримыми,* если они имѣютъ общую мѣру; въ противномъ случаѣ они наз. *несоизмѣримыми* *).

---

*) Существованіе несоизмѣримыхъ величинъ доказывается, между прочимъ, въ геометріи.

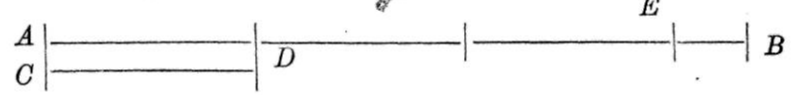
178. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы имѣть ясное представленіе о томъ или другомъ значеніи величины (напр., о длинѣ комнаты), его измѣряютъ при помощи другого значенія той же величины, которое принято за единицу (напр., помощью аршина). При измѣреніи могутъ представиться два различныхъ случая: 1) когда измѣряемое значеніе величины соизмѣримо съ единицей и 2) когда оно несоизмѣримо съ единицей.

1) *Измѣрить значеніе величины, соизмѣримое съ единицей, значитъ опредѣлить, сколько разъ въ немъ содержится единица или какая-нибудь доля единицы.*

Чтобы узнать это, находятъ общую мѣру между измѣряемымъ значеніемъ и единицей и узнаютъ, сколько разъ она содержится въ измѣряемомъ значеніи и въ единицѣ. Тогда, если общей мѣрой будетъ служить сама единица, то въ результатѣ измѣренія получится цѣлое число; если же общая мѣра въ единицѣ повторяется n разъ, а въ измѣряемомъ значеніи m разъ, то результатъ измѣренія выразится дробью $\frac{m}{n}$.

О числѣ иногда говорятъ, что оно представляетъ *мѣру* того значенія величины, отъ измѣренія котораго получилось это число. Цѣлыя и дробныя числа наз. *соизмѣримыми* числами.

2) Когда измѣряемое значеніе величины несоизмѣримо съ единицей, то о немъ составляютъ представленіе, какъ о *предѣлѣ* нѣкоторой перемѣнной соизмѣримой величины. Объяснимъ это на примѣрѣ. Пусть AB и CD два несоизмѣримые между собою отрѣзка прямой:



и одинъ изъ нихъ, напр., CD, принятъ за единицу. Желая измѣрить AB при помощи CD, узнаемъ сначала, сколько разъ цѣлая единица содержится въ AB; пусть окажется, что CD укладывается въ AB 3 раза съ остаткомъ $EB < CD$. Теперь опредѣлимъ, сколько разъ въ EB содержится какая-нибудь доля единицы, напр., $^1/_{10}$. Положимъ, 7 разъ съ ка-

кимъ-нибудь новымъ остаткомъ, меньшимъ $^1/_{10}$ доли *CD*. Далѣе узнаемъ, сколько разъ въ этомъ остаткѣ содержится болѣе мелкая доля единицы, напр., $^1/_{100}$; положимъ, 8 разъ съ новымъ остаткомъ. Сколько бы мы ни продолжали этого процесса, никогда не дойдемъ до конца; дѣйствительно, если предположимъ, напр., что послѣ укладыванія $^1/_{100}$ доли *CD* не получилось никакого остатка, то отрѣзокъ *AB* былъ бы равенъ 3,78 *CD* и, слѣд., между *AB* и *CD* была бы общая мѣра, именно $^1/_{100}$ *CD*, что, по условію, невозможно.

Вообразимъ себѣ теперь, что описанный процессъ измѣренія продолжается все далѣе и далѣе безъ конца. Тогда мы будемъ имѣть перемѣнную длину, принимающую безчисленное множество соизмѣримыхъ значеній, выражаемыхъ, напр., такими числами:

3; 3,7; 3,78; 3,782; 3,7826;...

Эта перемѣнная длина, по мѣрѣ продолженія процесса измѣренія, приближается все ближе и ближе къ *AB* такъ, что разность между *AB* и этой перемѣнной длиной дѣлается и остается меньше какой угодно малой длины. Это выражаютъ, говоря, что *AB* есть предѣлъ этой перемѣнной длины.

Каждое изъ полученныхъ выше чиселъ можно назвать *приближеннымъ* результатомъ измѣренія отрѣзка *AB*; причемъ, такъ какъ они выражаютъ длины, меньшія *AB*, эти результаты измѣренія будутъ *съ недостаткомъ*. Если же мы увеличимъ послѣдній знакъ каждаго числа на одну единицу, то получимъ новый рядъ чиселъ:

4; 3,8; 3,79; 3,783; 3,7827,...

представляющихъ соизмѣримыя значенія длины, большія *AB*. Эти числа тоже можно назвать приближенными результатами измѣренія длины *AB*, но *съ избыткомъ*. Степень приближенія этихъ результатовъ становится все больше и больше, по мѣрѣ продолженія процесса измѣренія. Такъ, число 3 (или 4) выражаетъ длину *AB съ точностью до 1;* число 3,7 (или 3,8) выражаетъ эту длину *съ точностью до* $^1/_{10}$ и т. д.

179. Несоизмѣримое число. Результатъ измѣренія всякаго значенія величины вообще наз. *числомъ*. Когда измѣряемое

значеніе соизмѣримо съ единицей, получившееся послѣ измѣренія число наз. *соизмѣримымъ;* такія числа, какъ мы видѣли, суть *цѣлыя* и *дробныя*. Когда же измѣряемое значеніе несоизмѣримо съ единицей, результатъ измѣренія наз. *несоизмѣримымъ числомъ* (или *ирраціональнымъ*). Его разсматриваютъ, какъ *предѣлъ, къ которому стремится приближенный результатъ измѣренія по мѣрѣ увеличенія степени приближенія.*

Обыкновенно несоизмѣримое число выражается десятичною дробью, у которой число десятичныхъ знаковъ предполагается безконечно большимъ.

Каждый приближенный результатъ измѣренія принимается за приближенное значеніе несоизмѣримаго числа съ недостаткомъ или съ избыткомъ, съ большею или меньшею степенью точности.

Несоизмѣримое число считаютъ *извѣстнымъ*, если извѣстенъ способъ получать его приближенныя значенія съ какою бы то ни было степенью приближенія.

Два числа, соизмѣримыя или несоизмѣримыя, считаются *равными* или *неравными*, смотря по тому, равны или не равны значенія величины, выражаемыя ими (при одной и той же единицѣ измѣренія). Въ случаѣ неравенства то число считается большимъ, для котораго соотвѣтствующее значеніе величины больше.

Введя въ математику понятіе о несоизмѣримомъ числѣ, мы можемъ сказать, что всякое значеніе *величины* можетъ быть выражено *числомъ*, соизмѣримымъ или несоизмѣримымъ.

180. Значеніе дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами. Условились производить надъ несоизмѣримыми числами тѣ же дѣйствія, какъ и надъ числами соизмѣримыми, согласно слѣдующему опредѣленію: *произвести то или другое дѣйствіе надъ несоизмѣримыми числами значитъ найти предѣлъ, къ которому стремится результатъ этого дѣйствія, если вмѣсто несоизмѣримыхъ чиселъ будемъ брать ихъ приближенныя значенія все съ большею и большею степенью*

приближенія *). Пусть, напр., M и N будутъ несоизмѣримыя числа, выражаемыя безконечными десятичными дробями (законъ составленія которыхъ извѣстенъ):

$$M=2{,}180354\ldots \qquad N=5{,}714832\ldots$$

Тогда умножить M на N значитъ найти предѣлъ, къ которому стремится рядъ такихъ произведеній:

2.5; 2,1.5,7; 2,18.5,71; 2,180.5,714; 2,1803.5,7148; и т. д.

Несоизмѣримыя значенія радикаловъ.

181. Въ предыдущихъ параграфахъ было показано, что квадратные и кубичные корни изъ многихъ чиселъ не могутъ быть выражены точно ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Докажемъ теперь, что то же самое можно сказать о корняхъ всякой степени.

Теорема 1. *Если цѣлое число N не есть точная m-ая степень другого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{N}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.*

Что $\sqrt[m]{N}$ не выражается цѣлымъ числомъ—слѣдуетъ изъ условія теоремы. Положимъ теперь, что существуетъ несократимая дробь $\frac{a}{b}$, m-ая степень которой равна N. Тогда

$$N=\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ a^m и b^m суть числа взаимно простыя, и потому частное $\frac{a^m}{b^m}$ не можетъ равняться цѣлому числу N.

Теорема 2. *Если числитель или знаменатель ариѳметической несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не есть точная m-ая степень цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.*

---

*) Здѣсь не мѣсто подробно излагать теорію дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами. Основательное изложеніе этого вопроса можно найти въ книгѣ „*Н. Билибинъ. Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ*, изданіе третье 1899 г.“, стр. 130 и слѣд.

Очевидно, что $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Предположимъ теперь, что $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ равняется несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p^m}{q^m}$$

Это равенство возможно только тогда, когда $p^m=a$ и $q^m=b$; но этого быть не можетъ, согласно условію теоремы.

181,a. Приближенное значеніе $\sqrt[m]{A}$. Пусть A означаетъ положительное цѣлое или дробное число, и m цѣлое положительное число. Назовемъ *приближеннымъ значеніемъ* $\sqrt[m]{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ каждую изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, которыя различаются одна отъ другой на $\frac{1}{n}$ и между m-ыми степенями которыхъ заключается A; такъ что, если дроби эти обозначимъ черезъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, то число x должно удовлетворять неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m\leqq A<\left(\frac{x+1}{n}\right)^m$$

Докажемъ, что такія приближенныя значенія существуютъ, какъ бы ни было велико число n *).

Для доказательства предположимъ, что числа натуральнаго ряда возвышены въ m-ую степень:

$$0^m,\ 1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m,\dots\ a^m,\ (a+1)^m\dots$$

Теперь составимъ произведеніе An^m, и будемъ его искать въ написанномъ выше ряду. Такъ какъ этотъ рядъ возрастаетъ, очевидно, безпредѣльно, то мы всегда въ немъ встрѣтимъ два такія сосѣднія числа, что одно изъ нихъ меньше или равно, а другое больше An^m. Пусть эти числа будутъ a^m и $(a+1)^m$, такъ что

$$a^m\leqq An^m<(a+1)^m$$

Откуда:

$$\frac{a^m}{n^m}\leqq A<\frac{(a+1)^m}{n^m}$$

---

*) Двойной знакъ $\leqq$ поставленъ для того, чтобы не дѣлать изъятія для случая, когда дробь $^x/_n$ есть точное значеніе $\sqrt[m]{A}$. При $n=1$, указанныя приближенныя значенія будутъ съ точностью до 1.

или: $$\left(\frac{a}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m$$

Такимъ образомъ, всегда могутъ быть найдены два числа: $\frac{a}{n}$ и $\frac{a+1}{n}$, представляющія собою приближенныя значенія $\sqrt[m]{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ *).

182. Истинное значеніе $\sqrt[m]{A}$ въ томъ случаѣ, когда A не есть точная m-ая степень. Для простоты разсужденія возьмемъ какой-нибудь частный случай $\sqrt[m]{A}$, напр., $\sqrt{2}$. Представимъ себѣ, что мы вычислили различныя приближенныя значенія этого корня, причемъ степень приближенія все болѣе и болѣе увеличивается; напр., положимъ, что мы нашли $\sqrt{2}$ сначала съ точностью до $^1/_{10}$, затѣмъ до $^1/_{100}$ и т. д. Тогда получимъ два ряда приближенныхъ значеній:

Прибл. значенія съ нед.	1,4	1,41	1,414	1,4142	. .
Прибл. значенія съ изб.	1,5	1,42	1,415	1,4143	. . .

Числа перваго ряда представляютъ собою рядъ увеличивающихся значеній величины, а числа второго ряда—рядъ уменьшающихся значеній; значенія второго ряда всегда больше значеній перваго, и разность между соотвѣтствующими значеніями все уменьшается и можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою. Изъ этого слѣдуетъ, что существуетъ нѣкоторое значеніе величины, которое представляетъ собою *общій предѣлъ* для увеличивающихся значеній перваго ряда и для уменьшающихся значеній второго ряда. *Число, измѣряющее этотъ предѣлъ, принимается за истинное значеніе* $\sqrt{2}$.

*) Изложенное доказательство, обнаруживая существованіе приближенныхъ значеній корня, вмѣстѣ съ тѣмъ указываетъ и способъ ихъ нахожденія. На практикѣ однако этотъ способъ не примѣняется по причинѣ его утомительности. Существуютъ другіе болѣе удобные способы.

Чтобы сдѣлать нагляднымъ существованіе этого предѣла, вообразимъ себѣ, что числа нашихъ рядовъ представляютъ собою нѣкоторыя *разстоянія*, откладываемыя на прямой PQ въ одну и ту же сторону отъ одной точки O:

P O A A_1 A_2 x B_2 B_1 B Q

Пусть $OA=1,4$, $OA_1=1,41$, $OA_2=1,414$ и т. д.; $OB=1,5$, $OB_1=1,42$, $OB_2=1,415$ и т. д. Такъ какъ разности: $OB-OA$, OB_1-OA_1, OB_2-OA_2 и т. д. могутъ быть сдѣланы какъ угодно малы, то, очевидно, существуетъ нѣкоторая точка X, которая составляетъ предѣльное положеніе для точекъ A и точекъ B. Число, выражающее длину OX, есть истинное значеніе $\sqrt{2}$. Это число несоизмѣримое, такъ какъ $\sqrt{2}$ не можетъ быть выраженъ соизмѣримымъ числомъ.

Подобно этому можно разъяснить, что вообще $\sqrt[m]{A}$, когда A не есть точная m-ая степень, есть несоизмѣримое число, представляющее собою *предѣлъ*, къ которому стремятся приближенныя значенія этого корня при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія.

182, *a*. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми значеніями радикаловъ имѣютъ тотъ смыслъ, который былъ указанъ прежде (§ 180) для несоизмѣримыхъ чиселъ вообще. Напр., возвысить $\sqrt{2}$ въ квадратъ значитъ найти *предѣлъ*, къ которому стремится квадратъ приближеннаго значенія $\sqrt{2}$ при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія. Возвышая въ квадратъ числа:

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ldots$$

представляющія приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ недостаткомъ, или числа:

$$1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ 1,4143;\ldots$$

представляющія приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ избыткомъ, мы замѣтимъ, что квадраты ихъ стремятся къ общему предѣлу 2:

$$1,4^2=1,96;\ 1,42^2=1,9881;\ 1,414^2=1,999396;\ldots$$

$$1,5^2=2,25;\ 1,42^2=2,0164;\ 1,415^2=2,002225,\ldots$$

Вообще, можно доказать, что предѣлъ m-ой степени приближеннаго значенія $\sqrt[m]{A}$, при неограниченномъ увеличеніи степени приближенія, равенъ A, такъ что всегда можно писать:

$$(\sqrt[m]{A})^m = A$$

Такимъ образомъ, будетъ ли A точная или неточная m-ая степень, всегда можно сказать, что $\sqrt[m]{A}$ **есть такое число, m-ая степень котораго равна** A. Поэтому всѣ свойства радикаловъ, основанныя на этомъ опредѣленіи корня (§ 146), примѣнимы и къ несоизмѣримымъ ихъ значеніямъ; такимъ образомъ, каковы бы ни были числа a, b и c, всегда можемъ писать:

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c};\ \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n;\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

ГЛАВА VII.

Дѣйствія надъ радикалами.

183. Ариѳметическое значеніе корня. Мы будемъ въ этой главѣ говорить только о положительномъ значеніи радикала изъ положительнаго числа; такое значеніе наз., какъ мы говорили прежде (§ 145), *ариѳметическимъ*.

Ариѳметическое значеніе корня изъ даннаго числа можетъ быть только *одно*. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что $\sqrt[m]{N}$ имѣетъ два различныя ариѳметическія значенія a и b, то получимъ: $a^m = b^m$; но это равенство невозможно, такъ какъ *разныя* положительныя числа, будучи взяты сомножителями одинаковое число разъ, не могутъ дать *одинаковыхъ* результатовъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что *если равны два числа, то равны и ариѳметическія значенія ихъ корней одинаковой степени.*

Замѣтимъ, что корень изъ отрицательнаго числа, если онъ нечетной степени, приводится къ ариѳметическому значенію,

взятому со знакомъ—; напр., $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$; если же онъ чётной степени, то представляетъ собою мнимое количество (§ 145).

184. Теорема. *Значеніе корня не измѣнится, если показателя его и показателя подкоренного количества умножимъ на одно и то же цѣлое и положительное число.*

Доказательство. Требуется доказать, что, напр., $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[9]{a^6}=\dots$ и вообще.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}},$$

гдѣ p есть какое-нибудь цѣлое положительное число. Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ np-ю степень. Отъ возвышенія правой части равенства получимъ a^{mp} (такъ какъ извлеченіе корня np-й степени и возвышеніе въ np-ю степень суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся). Чтобы возвысить лѣвую часть равенства въ np-ю степень, возвысимъ ее сначала въ n-ю степень, а потомъ въ p-ю (§ 140, теор. 2):

$$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=[(\sqrt[n]{a^m})^n]^p=[a^m]^p=a^{mp}.$$

Мы видимъ, что два числа: $\sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[np]{a^{mp}}$ отъ возвышенія въ одну и ту же np-ю степень даютъ одно и то же число a^{mp}; отсюда слѣдуетъ, что оба возвышаемыя числа суть корни np-й степени изъ a^{mp} и потому должны быть равны (если числа равны, то равны и ихъ ариѳметическіе корни одинаковой степени).

Читая доказанное равенство справа налѣво, видимъ, что значеніе корня не измѣняется *отъ дѣленія* его показателя и показателя подкоренного количества на одно и то же число (конечно, если дѣленіе возможно нацѣло).

Слѣдствіе 1-е. *Показателя корня и показателя подкоренного количества можно сократить на ихъ общаго множителя, если онъ есть.* Напр.:

$$\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4]{a^3} \qquad \sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}.$$

Слѣдствіе 2-е. *Если подкоренное число представляетъ собою произведеніе нѣсколькихъ степеней съ различными по-*

казателями и если эти показатели имѣютъ одного и того же общаго множителя съ показателемъ корня, то на этого множителя можно сократить всѣхъ показателей. Для примѣра возьмемъ $\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}}$. Представимъ это выраженіе такъ

$$\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}}=\sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6}$$

Теперь на основаніи слѣдствія 1-го. можемъ написать:

$$\sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6}=\sqrt{2a^2bx^3}$$

Слѣдствіе 3-е. *Показателей нѣсколькихъ корней можно сдѣлать одинаковыми* подобно тому, какъ знаменателей нѣсколькихъ дробей можно сдѣлать равными. Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всѣхъ радикаловъ и помножить показателя каждаго изъ нихъ и показателя подкоренного количества на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя (т.-е. на частное отъ дѣленія общаго кратнаго на показателя радикала). Пусть даны, напр., радикалы:

$$\sqrt{ax},\ \sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[12]{x}$$

Наименьшее кратное показателей этихъ радикаловъ есть 12; дополнительные множители суть: для перваго радикала 6, для второго 4 и для третьяго 1; на основаніи доказанной теоремы можемъ написать:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[12]{(ax)^6}=\sqrt[12]{a^6x^6};\ \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^8};\ \sqrt[12]{x}=\sqrt[12]{x}$$

185. Подобные радикалы. Подобными радикалами наз. такіе, у которыхъ одинаковы подкоренныя количества и одинаковы показатели радикаловъ (различаться могутъ, слѣд., только множители, стоящіе передъ знакомъ радикала, и знаки передъ ними). Таковы, напр., выраженія: $+3a\sqrt[3]{xy}$ и $-5b\sqrt[3]{xy}$.

Чтобы опредѣлить, подобны ли между собою данные радикалы, слѣдуетъ предварительно *упростить ихъ*, т.-е. если возможно:

1) вынести изъ-подъ знака радикала тѣхъ множителей, изъ которыхъ возможно извлечь корень (§ 148);

2) понизить степень радикала, сокративъ показателей корня и подкоренного количества на общаго множителя;

3) освободиться подъ радикалами отъ знаменателей дробей (какъ будетъ указано на второмъ приводимомъ ниже примѣрѣ).

Примѣръ 1. Радикалы: $\sqrt[3]{8ax^3}, \sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если ихъ упростимъ такъ:

$$\sqrt[3]{8ax^3}=2x\sqrt[3]{a};\quad \sqrt[6]{64a^2y^{12}}=2y^2\sqrt[6]{a^2}=2y^2\sqrt[3]{a}$$

Примѣръ 2. Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$ и $\sqrt{6x}$ окажутся подобными, если освободимся подъ радикалами отъ знаменателей:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x.3}{3.3}}=\sqrt{\frac{6x}{9}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x};$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6\,.\,x}{x\,.\,x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

186. Разсмотримъ теперь, какъ производятся различныя дѣйствія надъ ирраціональными одночленами.

Сложеніе и вычитаніе. Чтобы сложить или вычесть ирраціональные одночлены, соединяютъ ихъ знаками $+$ или $-$ и, если возможно, дѣлаютъ приведеніе подобныхъ радикаловъ.

Примѣры:

1) $a\sqrt[3]{a^4bc}+b\sqrt[3]{ab^7c}+c\sqrt[3]{abc^{10}}=a^2\sqrt[3]{abc}+b^3\sqrt[3]{abc}+c^4\sqrt[3]{abc}=$
$$=(a^2+b^3+c^4)\sqrt[3]{abc}$$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}$
$$-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$$

3) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=$
$$=4x\sqrt{x}.$$

Умноженіе. Такъ какъ $\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c\ldots}$ (§ 146, теор. 1), то и наоборотъ: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c\ldots}=\sqrt[n]{abc\ldots}$ Отсюда слѣдуетъ: *чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ одинаковыми показателями, достаточно перемножить ихъ подкоренныя количества.*

Если для перемноженія даны радикалы съ различными показателями, то ихъ предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если передъ радикалами есть коэффиціенты, то ихъ перемножаютъ.

Примѣры:

1 $ab\sqrt{2a}.\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}.\ 2b\sqrt{ab}=2a^2b\sqrt{a^2b^2}=2a^3b^2$

2) $\sqrt[4]{3}.\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{\frac{1}{2}}=\sqrt[12]{3^3}.\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}.\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt[12]{3^3.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{2^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{12}}$

Дѣленіе. Такъ какъ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§ 146, теор. 3), то и наоборотъ: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, т.-е., *чтобы раздѣлить радикалы съ одинаковыми показателями, достаточно раздѣлить ихъ подкоренныя количества.*

Радикалы съ различными показателями предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если есть коэффиціенты, то ихъ дѣлятъ.

Примѣры:

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=$

$=-15\sqrt{b}$

2) $\sqrt[5]{\frac{2a+b}{a+b}-1}:\sqrt[5]{1-\frac{b}{a+b}}=\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}:\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}=1$

3) $\frac{3a^2}{25b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a^3}{a-x}}=\frac{15a^2b}{50ab}\sqrt[4]{\frac{a^2(a-x)^2}{(a-x)4a^6}}=\frac{3}{10}\sqrt[4]{\frac{a-x}{4}}.$

Возвышеніе въ степень. *Чтобы возвысить радикалъ въ степень, достаточно возвысить въ эту степень подкоренное количество.* Дѣйствительно, если показатель степени есть цѣлое положительное число m, то:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ldots=\sqrt[n]{aaa\ldots}=\sqrt[n]{a^m}$$

Если показатель степени есть цѣлое отрицательное число $-m$, то:

$$(\sqrt[n]{a})^{-m}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\sqrt[n]{a^{-m}}$$

Наконецъ, если показатель степени есть 0, то:

$$(\sqrt[n]{a})^0=1 \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{a^0}=\sqrt[n]{1}=1$$

Примѣры: 1) $(\sqrt[4]{2ab^3x^2})^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}$

$$2)\ \left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$$

$$3)\ \left(a\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3=a^3\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3=a^3\sqrt{\left(a\sqrt[3]{b}\right)^3}$$

$$=a^3\sqrt{a^3(\sqrt[3]{b})^3}=a^3\sqrt{a^3b}=a^4\sqrt{ab}.$$

Извлеченіе корня. *Чтобы извлечь корень изъ радикала, достаточно перемножить ихъ показателей.*

Требуется доказать, что $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a}$ и вообще:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ mn-ую степень. Отъ возвышенія правой части получимъ, по опредѣленію корня, a; чтобъ возвысить лѣвую часть въ mn-ую степень, достаточно возвысить ее сначала въ n-ую степень, потомъ результатъ въ m-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a.$$

Отсюда видно, что предполагаемое равенство вѣрно.

Слѣдствіе 1-е. Результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ извлеченій корней не зависитъ отъ порядка дѣйствій; такъ:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a} \text{ и } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}; \text{ слѣд. } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Слѣдствіе 2-е. Извлеченіе корня, у котораго показатель есть число составное, сводится къ послѣдовательному извлеченію корней, у которыхъ показатели суть простые множители этого составного числа. Такъ:

$$\sqrt[6]{a}=\sqrt[3]{\sqrt{a}};\quad \sqrt[18]{a}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}};\quad \sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}.$$

Примѣръ. Преобразовать выраженіе $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{2x^2\sqrt{{}^3/_4x^3}}}$

Подведемъ множителя $2x^2$ подъ знакъ квадратнаго радикала, для чего предварительно возвысимъ его въ квадратъ; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{(2x^2)^2\,{}^3/_4x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{4x^4\,.\,{}^3/_4x^3}}}=$$
$$=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{3x^7}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[6]{3x^7}}.$$

Теперь подведемъ множителя x подъ знакъ радикала 6-й степени; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^6.3x^7}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{3x^{13}}}=\sqrt[24]{3x^{13}}.$$

187. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами производятся по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены раньше для многочленовъ раціональныхъ. Напр.:

$$1)\ \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0{,}3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1{,}5}+7{,}5=8{,}3-4\sqrt{1{,}5}$$

$$2)\ \left(n\sqrt[3]{nx^2}-2n^2x\sqrt[3]{n^2x}+x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}\right):n^2\sqrt[3]{nx^2}=$$
$$=\frac{1}{n}-2x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}+\frac{x}{n^2}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{n}-2\sqrt[3]{nx^2}+\frac{1}{n^2}.$$

188. Приведеніе знаменателя дроби къ раціональному виду. При вычисленіи дробныхъ выраженій, знаменатели которыхъ содержатъ радикалы, бываетъ полезно предварительно преобразовать дробь такъ, чтобы знаменатель ея былъ количество раціональное. Чтобы указать пользу такого преобразованія, положимъ для примѣра, что намъ нужно вычислить:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}. \qquad [1]$$

Мы можемъ производить вычисленія или прямо по этой формулѣ, или же предварительно сдѣлать ея знаменателя раціональнымъ, для чего достаточно умножить оба члена дроби [1] на сумму $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \qquad [2]$$

Очевидно, для вычисленія формула [2] удобнѣе формулы [1]*).

Приведемъ простѣйшіе **примѣры освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ:**

1) $\frac{m}{n\sqrt{a}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$, получимъ:

$$\frac{m}{n\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{na}.$$

Когда a есть число цѣлое составное, то полезно разложить его на простыхъ множителей съ цѣлью опредѣлить, какихъ множителей недостаетъ въ немъ для того, чтобы a было точнымъ квадратомъ. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень изъ произведенія только недостающихъ множителей; такъ, напр.:

$$\frac{m}{\sqrt{40}}=\frac{m}{\sqrt{2.2.2.5}}=\frac{m\sqrt{2.5}}{\sqrt{2^3.5}\sqrt{2.5}}=\frac{m\sqrt{10}}{\sqrt{2^4.5^2}}=\frac{m\sqrt{10}}{2^2.5}=\frac{m\sqrt{10}}{20}.$$

2) $\frac{a}{a+\sqrt{b}.}$ Умноживъ числителя и знаменателя на $a-\sqrt{b}$, будемъ имѣть:

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}}=\frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}\frac{ma-m\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

3) Подобно этому для освобожденія отъ радикала знаменателя дроби $\frac{m}{a-\sqrt{b}}$ достаточно умножить оба ея члена на $a+\sqrt{b}$.

---

*) Удобнѣе не только потому, что она содержитъ 3 дѣйствія, а не 4, какъ формула [1], но также и потому, что при вычисленіи, которое по необходимости можетъ быть только приближенное, степень погрѣшности результата сравнительно просто опредѣляется по формулѣ [2]. Такъ, вычисливъ $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ съ точностью до $^1/_{1000}$, т.-е. положивъ $\sqrt{3}=1,732...$ и $\sqrt{2}=1,414...$, мы получимъ по формулѣ [2] число 3,146..., которое, какъ легко сообразить, точно до $^2/_{1000}$ (слѣд., въ этомъ числѣ нельзя ручаться за правильность цыфры тысячныхъ).

4) $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}-m\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}+m\sqrt{b}}{a-b}$$

5) $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Желая сначала освободить знаменателя отъ радикала $\sqrt{c}$, примемъ совокупность остальныхъ членовъ за одночленъ; тогда знаменатель приметъ видъ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$. Умножимъ теперь числителя и знаменателя дроби на $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$. Тогда въ знаменателѣ получимъ: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c=(a+b-c)+2\sqrt{ab}$. Умноживъ опять числителя и знаменателя на $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$, получимъ въ знаменателѣ раціональное выраженіе $(a+b-c)^2-4ab$.

6) Подобнымъ пріемомъ можно уничтожить въ знаменателѣ сколько угодно *квадратныхъ* радикаловъ. Пусть, напр., знаменатель есть: $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$. Представивъ его въ видѣ: $\sqrt{a}+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c}$, замѣчаемъ, что имѣемъ дѣло съ тремя различными радикалами: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$. Желая освободиться отъ радикала $\sqrt{a}$, вынесемъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается: $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{bc}$. Теперь, очевидно, что для уничтоженія $\sqrt{a}$ достаточно умножить знаменателя (а слѣд. и числителя) на $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{bc}$; тогда въ знаменателѣ получимъ: $a(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-bc=a+ab+ac+2a\sqrt{b}+2a\sqrt{c}+2a\sqrt{bc}-bc$.

Желая теперь освободиться отъ $\sqrt{b}$, представимъ знаменателя въ видѣ двучлена:

$$\sqrt{b}\,(2a+2a\sqrt{c})+(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})$$

и умножимъ числителя и знаменателя дроби на разность этихъ членовъ; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$b(2a+2a\sqrt{c})^2-(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})^2$$

Раскрывъ скобки и поступая съ $\sqrt{c}$ совершенно такъ же, освободимся и отъ него.

7) Если знаменатель имѣетъ видъ: $\sqrt[3]{a} \mp b$, или $a \mp \sqrt[3]{b}$, или $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$, то мы можемъ сдѣлать его раціональнымъ, основываясь на тождествахъ:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (\S\ 61,\ \text{VIII})$$

Напр.: $$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2]}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2]}$$
$$=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

8) Вообще, когда знаменатель дроби есть *биномъ*, представляющій сумму или разность двухъ радикаловъ какой угодно степени, то его можно сдѣлать раціональнымъ, основываясь на тождествѣ (§ 60):

$$(x-y)(x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\cdots+y^{n-1})=x^n-y^n$$

Пусть, напр., знаменатель имѣетъ видъ:
$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=x-y$, гдѣ $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ldots+y^{n-1}$, получимъ въ знаменателѣ $x^n-y^n=a-b$.

Если знаменатель есть $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, то, представивъ его въ видѣ: $\sqrt[n]{a}-(-\sqrt[n]{b})=x-y$, гдѣ $x=\sqrt[n]{a}$, $y=-\sqrt[n]{b}$, сведемъ этотъ случай на предыдущій.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ, когда знаменатель имѣетъ видъ $m\pm\sqrt{b}$.

Если знаменатель есть биномъ $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[m]{b}$, то можно предварительно привести эти радикалы къ одинаковымъ показателямъ:

$$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m}\pm\sqrt[nm]{b^n}$$

и потомъ поступать по предыдущему.

Примѣръ: $$\frac{M}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}=\frac{M}{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{b^3}}=$$

$$=\frac{M[(\sqrt[6]{a^2})^5+\sqrt[6]{b^3}(\sqrt[6]{a^2})^4+ba+(\sqrt[6]{b^3})^3(\sqrt[6]{a^2})^2+(\sqrt[6]{b^3})^4\sqrt[6]{a^2}+(\sqrt[6]{b^3})^5]}{a^2-b^3}=$$

$$M(a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt{b}\sqrt[3]{a}+ba+b\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}+b^2\sqrt[3]{a}+b^2\sqrt{b}):(a^2-b^3)$$

Объ общемъ способѣ освобожденія знаменателя отъ радикаловъ см. ниже, § 215.

Примѣры.

$$1)\ \frac{\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{8-6}=\frac{4-\frac{2}{3}\sqrt{12}-\sqrt{12}+2}{2}$$

$$=3-\frac{5}{6}\sqrt{12}$$

$$2)\ \frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{2}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{8\sqrt{2}+8-4\sqrt{12}}{4+4\sqrt{2}+2-6}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{16+8\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{8}=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$$3)\ \frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}=\frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\sqrt{a}}\sqrt{1+\sqrt{a}}}=\frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}}$$

$$=\sqrt{1-a}\sqrt{1+\sqrt{a}}=\sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})}$$

$$4)\ \frac{5}{\sqrt[4]{3}-2\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}-12}=\frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+12)}{-141}$$

ОТДѢЛЪ V.

Уравненія степени выше первой.

ГЛАВА I.

Квадратное уравненіе.

189. Общій видъ квадратнаго уравненія. Предположимъ, что въ данномъ уравненіи мы сдѣлали слѣдующія преобразованія: раскрыли скобки, если онѣ есть, уничтожили знаменателей, если въ уравненіи есть дробные члены, перенесли *всѣ* члены въ лѣвую часть уравненія и сдѣлали приведеніе подобныхъ членовъ. Если послѣ этого въ лѣвой части уравненія окажется членъ, содержащій неизвѣстное въ квадратѣ, и не будетъ членовъ, содержащихъ неизвѣстное въ болѣе высокой степени, то уравненіе наз. *квадратнымъ*. Общій видъ такого уравненіи есть:

$$ax^2+bx+c=0$$

гдѣ a, b и c суть данныя положительныя или отрицательныя числа, или же алгебраическія выраженія, составленныя изъ данныхъ количествъ; a, b и c называются *коэффиціентами* квадратнаго уравненія; изъ нихъ c наз. также *свободнымъ членомъ*.

Замѣтимъ, что коэффиціентъ a мы всегда можемъ сдѣлать *положительнымъ*, перемѣнивъ въ случаѣ надобности передъ всѣми членами уравненія знаки на обратные.

Примѣръ 1. $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x+1)}{1}$

Раскрываемъ скобки: $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5x+5}{4}$

Уничтожаемъ знаменат. $72+2x^2=15x^2+15x$

Переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть:

$$72+2x^2-15x^2-15x=0$$

Дѣлаемъ приведеніе: $-13x^2-15x+72=0$

Перемѣняемъ знаки: $13x^2+15x-72=0$

Коэффиціенты a, b и c общаго вида квадратнаго уравненія приняли въ этомъ примѣрѣ такія частныя значенія: $a=13$, $b=15$ и $c=-72$.

Примѣръ 2. $$\frac{x}{a-b}-\frac{1}{2\sqrt{a}-x}=0;$$

$x(2\sqrt{a}-x)-(a-b)=0;$ $2x\sqrt{a}-x^2-(a-b)=0$

$$x^2-2x\sqrt{a}+(a-b)=0.$$

Коэффиціенты общаго вида квадратнаго уравненія здѣсь приняли такія частныя значенія: $a=1$, $b=-2\sqrt{a}$, $c=a-b$*).

190. Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія. Уравненію $ax^2+bx+c=0$ часто придаютъ болѣе простой видъ, раздѣливъ всѣ его члены на коэффиціентъ при x^2. Обозначивъ для краткости $\frac{b}{a}$ черезъ p, а $\frac{c}{a}$ черезъ q, получимъ:

$$x^2+px+q=0.$$

Такъ, уравненіе $3x^2-15x+2=0$, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на 3, приметъ видъ: $x^2-5x+{}^2/_3=0$. Здѣсь $p=-5$, $q={}^2/_3$.

191. Рѣшеніе неполнаго квадратнаго уравненія. Квадратное уравненіе наз. *неполнымъ*, когда въ немъ нѣтъ члена, содержащаго x, или нѣтъ свободнаго члена. Неполныя квадратныя уравненія могутъ быть только трехъ слѣдующихъ видовъ:

1) $ax^2+c=0$ 2) $ax^2+bx=0$ и 3) $ax^2=0$.

Разсмотримъ рѣшеніе каждаго изъ нихъ.

I. Изъ уравненія $ax^2+c=0$ находимъ:

$$ax^2=-c \text{ и } x^2=-\frac{c}{a}.$$

---

*) Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ намъ пришлось отбросить общаго знаменателя $(a-b)$ $(2\sqrt{a}-x)$, содержащаго неизвѣстное, то надо рѣшить вопросъ, не ввели ли мы этимъ *посторонняго* рѣшенія, обращающаго въ нуль отброшеннаго знаменателя (см. § 93 и 94). Такимъ рѣшеніемъ можетъ быть только $x=2\sqrt{a}$ (если a не равно b). Подставивъ это количество на мѣсто x въ получившееся квадр. уравненіе, находимъ, что оно ему не удовлетворяетъ; слѣд., отбрасываніе знаменателя не ввело посторонняго рѣшенія.

Это равенство требуетъ, чтобы квадратъ неизвѣстнаго равнялся количеству $-{}^c/_a$; значитъ, неизвѣстное должно равняться квадратному корню изъ этого количества. Это возможно только тогда, когда выраженіе $-{}^c/_a$ даетъ положительное число, что будетъ тогда, когда буквы c и a означаютъ числа съ противоположными знаками (если, напр., $c=-8, a=+2$, то $-\frac{c}{a}=-\frac{-8}{+2}=+4$). Условимся обозначать знакомъ $\sqrt{}$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и примемъ во вниманіе, что квадратный корень изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія (§ 145, 2); тогда можемъ написать:

$$x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Обозначая одно значеніе черезъ x_1, а другое черезъ x_2, можемъ то же самое подробнѣе выразить такъ:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}};\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если же буквы c и a означаютъ числа съ одинаковыми знаками, то выраженіе $-{}^c/_a$ представляетъ собою отрицательное число; тогда уравненіе $ax^2+c=0$ не можетъ быть удовлетворено никакимъ вещественнымъ числомъ; въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе имѣетъ два *мнимыхъ* корня.

Примѣръ 1. *Рѣшить уравненіе* $3x^2-27=0$.

$3x^2=27$; $x^2=9$; $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$ (подробнѣе: $x_1=3$, $x_2=-3$).

Примѣръ 2. *Рѣшить уравненіе* $x^2+25=0$.

$x^2=-25$; $x=\pm\sqrt{-25}$; корни мнимые.

II. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^2+bx=0$, представимъ его такъ: $x\,(ax+b)=0$. Произведеніе можетъ равняться нулю только тогда, когда какой-нибудь изъ сомножителей равенъ нулю; слѣд., разсматриваемое уравненіе удовлетворяется, если положимъ, что $x=0$ или $ax+b=0$. Второе равенство даетъ: $x=-{}^b/_a$. Итакъ, уравненіе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два корня $x_1=0$ и $x_2=-{}^b/_a$.

Примѣръ. $2x^2-7x=0$, $x(2x-7)=0$; $x_1=0$; $x_2={}^7/_2$.

III. Наконецъ, квадратное уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ, очевидно, только одно рѣшеніе: $x=0$.

192. Рѣшеніе уравненія вида $x^2+px+q=0$. Перенеся свободный членъ въ правую часть, получимъ: $x^2+px=-q$. Двучленъ x^2+px можно разсматривать, какъ $x^2+2.\ {}^p/_2\ x$, т.-е. какъ сумму квадрата x съ удвоеннымъ произведеніемъ x на ${}^p/_2$. Отсюда заключаемъ, что если къ этому двучлену придадимъ количество $({}^p/_2)^2$, то получимъ трехчленъ, представляющій собою квадратъ суммы $x+{}^p/_2$. Замѣтивъ это, приложимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $({}^p/_2)^2$:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2, \text{ или } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Если же квадратъ числа $x+\frac{p}{2}$ равенъ $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, то это значитъ, что первое есть корень квадратный изъ второго. Обозначая попрежнему знакомъ $\sqrt{}$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня, получимъ:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

и слѣд.:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

или подробнѣе:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Замѣтимъ, что количество $-\frac{p}{2}$ представляетъ половину коэффиціента при неизвѣстномъ въ первой степени, взятаго *съ обратнымъ знакомъ*; поэтому выведенную для неизвѣстнаго формулу мы можемъ высказать такъ:

Неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равно половинѣ коэффиціента при неизвѣстномъ въ 1-й степени съ обратнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

Замѣчаніе. Если p есть число отрицательное, то количество $-\frac{p}{2}$ должно быть числомъ положительнымъ; точно такъ же если q число отрицательное, то количество $-q$ число положительное.

Примѣры: 1) $x^2-7x+10=0$; здѣсь $p=-7$, $q=+10$;

поэтому: $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}$

Слѣд.: $x_1=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$, $x_2=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$

Повѣрка: $5^2-7.5+10=0$; $2^2-7.2+10=0$.

2) $x^2-x-6=0$; здѣсь $p=-1$, $q=-6$, поэтому:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3,\quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$$

Повѣрка: $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$

3) $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$. Корни мнимые.

4) $x^2-18x+81=0$; $x=9\pm\sqrt{81-81}=9$. Уравненіе имѣетъ только одинъ корень.

Другой пріемъ рѣшенія. Лѣвую часть уравненія $x^2+px+q=0$ можно разложить на множителей первой степени относительно x слѣдующимъ образомъ:

$$x^2+px+q=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+q=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

Данное уравненіе требуетъ, чтобы это произведеніе равнялось нулю; для этого необходимо, чтобы какой-нибудь сомножитель равнялся нулю; слѣд., мы должны положить, что

или $x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$, или $x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$.

Такимъ образомъ рѣшеніе квадратнаго уравненія приводится къ рѣшенію двухъ уравненій первой степени. Изъ нихъ находимъ:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \text{ и }\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Это и есть тѣ два корня, которые мы выше нашли инымъ путемъ.

Изъ этого пріема рѣшенія можно вывести два слѣдствія:

1. *Квадратное уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней,* потому что оно приводится къ *двухъ* уравненіямъ первой степени, а уравненіе первой степени не можетъ имѣть болѣе одного корня.

2. *Трехчленъ* x^2+px+q *разлагается на два множителя первой степени относительно* x. Эти множители могутъ быть представлены такъ:

1-й множитель: $x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=x-\alpha$,

2-й множитель: $x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=x-\beta$,

если черезъ α и β обозначимъ корни уравненія $x^2+px+q=0$.

193. Когда корни бываютъ вещественные и когда мнимые. Разсматривая выведенныя нами формулы:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-p} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$\text{или: } x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

замѣчаемъ, что:

1) Если количество $\frac{p^2}{4}-q$ есть число положительное, то оба корня вещественны и различны;

2) если количество $\frac{p^2}{4}-q$ есть число отрицательное, то оба корня—мнимые (другими словами, уравненіе не имѣетъ корней);

3) если количество $\frac{p^2}{4}-q$ равно нулю, то и $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$; въ этомъ случаѣ $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$, т.-е. уравненіе имѣетъ одно рѣшеніе.

194. Рѣшеніе уравненія вида $ax^2+bx+c=0$. Раздѣливъ всѣ члены этого уравненія на a, получимъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Примѣнимъ къ этому виду уравненія формулу, выведенную раньше для уравненія $x^2+px+q=0$, и упростимъ ее:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

т.-е. *неизвѣстное квадратнаго уравненія равно дроби, у которой числитель есть коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ 1-й степени съ обратнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія коэффиціента при неизвѣстномъ во 2-й степени на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффиціентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени.*

Замѣчанія. 1) Формула: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ представляетъ собою самое *общее* рѣшеніе квадратнаго уравненія, потому что изъ нея можно получить какъ рѣшеніе упрощеннаго уравненія $x^2+px+q=0$ (полагая $a=1$), такъ и рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій (полагая $b=0$ или $c=0$).

2) *Общая формула упрощается, когда коэффиціентъ b есть четное число.* Пусть, напр., $b=2k$, т.-е. уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax^2+2kx+c=0.$$

Примѣняя общую формулу, получимъ:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}$$

$$x=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-\mathbf{k}\pm\sqrt{\mathbf{k}^2-\mathbf{ac}}}{\mathbf{a}}.$$

Примѣры:

1) $3x^2-7x+4=0$; здѣсь $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4.3.4}}{2.3}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}$$

$$x_1=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\ x_2=1.$$

2) $5x^2-8x-2=0$; здѣсь $a=5$, $b=-8=-2.4$, $c=-2$.

Примѣняя сокращенную формулу, выведенную для b четнаго, получаемъ:

$$a=\frac{4\pm\sqrt{16+10}}{5}=\frac{4\pm\sqrt{26}}{5}$$

$\sqrt{26}=5{,}09$ (до $^1/_{100}$); $x_1=\frac{9{,}09}{5}=1{,}818$; $x_2=\frac{-1{,}09}{5}=-0{,}218$

3) $2x^2-3x+10=0$; здѣсь $a=2$, $b=-3$; $c=10$.

$$x_1=\frac{3+\sqrt{-71}}{\ };\ x_2=\frac{3-\sqrt{-71}}{4}$$

Оба корня оказываются мнимыми.

4) Рѣшимъ еще слѣдующее уравненіе съ буквенными коэффиціентами:

$$(a^2-b^2)x^2-2(2a^2-b^2)x+4a^2-b^2=0$$

$$x=\frac{2a^2-b^2\pm\sqrt{(2a^2-b^2)^2-(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{a^2-b^2}$$

Подкор.величина$=4a^4-4a^2b^2+b^4-4a^4+4a^2b^2+a^2b^2-b^4=a^2b^2$

$$x_1=\frac{2a^2-b^2+ab}{a^2-b^2};\quad x_2=\frac{2a^2-b^2-ab}{a^2-b^2}$$

$$x_1=\frac{a^2-b^2+a^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a-b)+a(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a-b}{a-b}$$

$$x_2=\frac{a^2-b^2+a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a-b)+a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a+b}{a+b}$$

195. Теорема. *Квадратное уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней; въ противномъ случаѣ всѣ его коэффиціенты равны нулю.*

Док. Положимъ, что уравненіе $ax^2+bx+c=0$ имѣетъ три корня: α, β и γ. Въ такомъ случаѣ мы должны имѣть 3 тождества:

$$a\alpha^2+\beta\alpha+c=0;\ a\beta^2+b\beta+c=0;\ a\gamma^2+b\gamma+c=0.$$

Вычитая изъ перваго равенства второе, затѣмъ третье, получимъ:

$$\begin{matrix} a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0 \\ a(\alpha^2-\gamma^2)+b(\alpha-\gamma)=0 \end{matrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}[a(\alpha+\beta)+b](\alpha-\beta)=0\\ [a(\alpha+\gamma)+b](\alpha-\gamma)=0\end{cases}$$

Такъ какъ $\alpha-\beta$ и $\alpha-\gamma$ не равны нулю (ибо α, по предположенію, не равно ни β, ни γ), то изъ послѣднихъ равенствъ выводимъ:

$$a(\alpha+\beta)+b=0\ \text{и}\ a(\alpha+\gamma)+b=0.$$

Откуда вычитаніемъ получимъ: $a(\beta-\gamma)=0$.

Такъ какъ $\beta-\gamma$ не равно 0, то послѣднее равенство даетъ: $a=0$.

Вставивъ это значеніе a въ предшествующія равенства, находимъ $b=0$; наконецъ, изъ даннаго уравненія, положивъ въ немъ $a=b=0$, имѣемъ $c=0$.

Итакъ, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ **и** $\boldsymbol{c}$ одновременно не равны 0, то квадратное уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней; если же $a=b=c=0$, то уравненіе, очевидно, имѣетъ безчисленное множество корней.

Слѣдствіе. Если трехчленъ ax^2+bx+c обращается въ 0 *болѣе, чѣмъ при двухъ значеніяхъ* x, то онъ равенъ 0 при всякомъ значеніи x, потому что всѣ его коэффиціенты равны нулю.

196. Число корней квадратнаго уравненія. Разсматривая рѣшеніе квадратныхъ уравненій, видимъ, что эти уравненія иногда имѣютъ два корня, иногда одинъ, иногда ни одного. Однако *согласились приписывать квадратнымъ уравненіямъ во всѣхъ случаяхъ два корня*, разумѣя при этомъ, что корни могутъ быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашенія состоитъ въ томъ, что формулы, выражающія мнимые корни уравненія, обладаютъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ вещественнымъ корнямъ, стоитъ только, совершая дѣйствія надъ мнимыми количествами, руководиться правилами, выведенными для вещественныхъ количествъ, принимая притомъ, что $(\sqrt{-a})^2=-a$. Точно такъ же, когда уравненіе имѣетъ *одинъ* корень, мы можемъ, разсматривая этотъ корень, какъ *два одинаковыхъ*, приписать имъ тѣ же свойства, какія принадлежатъ разнымъ корнямъ уравненія. Простѣйшія изъ этихъ свойствъ выражаются въ слѣдующей теоремѣ:

197. Теорема. *Сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени есть 1, равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени, взятому съ обратнымъ знакомъ; произведеніе корней этого уравненія равно свободному члену.*

Док. Обозначивъ черезъ α и β корни уравненія $x^2+px+q=0$, будемъ имѣть (каковы бы ни были эти корни):

$$\alpha=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\ \beta=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$\alpha+\beta=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p$$

$$\alpha\beta=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$$

Это произведеніе можно найти сокращеннымъ путемъ основываясь на равенствѣ: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\alpha\beta=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q$$

Если α и β будутъ корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, или, что то же, уравненія $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, то будемъ имѣть:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}; \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

Обратная теорема. *Если количества* α, β, p и q *таковы, что* $\alpha+\beta=-p$ и $\alpha\beta=q$, *то* α и β *суть корни уравненія* $x^2+px+q=0$.

Док. Требуется доказать, что каждое изъ количествъ α и β удовлетворяетъ уравненію $x^2+px+q=0$. Изъ равенства $\alpha+\beta=-p$ имѣемъ: $\alpha=-p-\beta$, послѣ чего равенство $\alpha\beta=q$ даетъ:

$$-p\beta-\beta^2=q \text{ или: } \beta^2+p\beta+q=0.$$

Значитъ, β есть корень ур. $x^2+px+q=0$; подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и α есть корень того же уравненія.

Слѣдствіе 1-е. *По даннымъ корнямъ можно составить квадратное уравненіе.* Пусть требуется составить уравненіе, котораго корни были бы 2 и -3. Положивъ, что $2+(-3)=-p$ и $2.(-3)=q$, находимъ: $p=1$, $q=-6$. Значитъ, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2+x-6=0.$$

Подобно этому найдемъ, что -2 и -2 будутъ корнями уравненія $x^2+4x+4=0$, 3 и 0 будутъ корни уравненія $x^2-3x=0$, и т. п.

Слѣдствіе 2-е. *Не рѣшая квадратнаго уравненія, можно опредѣлить знаки его корней, если эти корни вещественные.* Пусть, напр., имѣемъ уравненіе $x^2+8x+10=0$. Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ выраженіе $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ даетъ положительное число, то оба корня должны быть вещественные. Опредѣлимъ, не рѣшая уравненія, знаки этихъ корней. Для этого разсуждаемъ такъ: обращая вниманіе сначала на свободный членъ $(+10)$, видимъ, что онъ имѣетъ знакъ $+$; значитъ, произведеніе корней должно быть *положительное*, т.-е. оба корня имѣютъ *одинаковые* знаки. Чтобы опредѣлить, какіе именно, обратимъ вниманіе на коэффиціентъ при x, (т.-е. на $+8$); онъ имѣетъ знакъ $+$; слѣд., сумма коэффиціен-

товъ *отрицательна*; поэтому одинаковые знаки у корней должны быть *минусы*.

Подобными разсужденіями не затруднимся опредѣлить знаки у корней и во всякомъ другомъ случаѣ. Такъ, уравненіе $x^2+8x-10=0$ имѣетъ корни съ разными знаками (потому что ихъ произведеніе отрицательно), причемъ отрицательный корень имѣетъ бо́льшую абсолютную величину (потому что ихъ сумма отрицательна); уравненіе $x^2-8x-10=0$ имѣетъ тоже корни съ разными знаками, но бо́льшая абсолютная величина принадлежитъ положительному корню.

198. Разложеніе трехчлена второй степени на множителей первой степени. Выраженіе ax^2+bx+c, гдѣ x означаетъ *произвольное число*, а a, b и c какія-нибудь данныя числа, наз. *трехчленомъ 2-й степени*. Значенія x, обращающія трехчленъ въ 0, наз. его *корнями*; эти корни суть корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, или $x^2+{}^b/_a x+{}^c/_a=0$ *). Зная эти корни, мы можемъ разложить трехчленъ на множителей 1-ой степени относительно x. Дѣйствительно, пусть эти корни будутъ α и β. По свойству корней имѣемъ:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ и } \alpha\beta=\frac{c}{a}; \text{ откуда: } \frac{b}{a}=-(\alpha+\beta) \text{ и } \frac{c}{a}=\alpha\beta;$$

поэтому:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=$$
$$=x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Умноживъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Такимъ образомъ, трехчленъ ax^2+bx+c разлагается на три множителя, изъ которыхъ первый равенъ коэффиціенту при x^2, второй есть разность между x и однимъ корнемъ трехчлена, а третій—разность между x и другимъ его корнемъ.

---

*) Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что не должно смѣшивать трехчлена ax^2+bx+c съ лѣвою частью уравненія $ax^2+bx+c=0$, такъ какъ въ трехчленѣ буква x означаетъ *какое угодно число*, тогда какъ въ уравненіи она означаетъ только тѣ числа, которыя удовлетворяютъ уравненію.

Трехчленъ x^2+px+q, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть **1**, разлагается на 2 множителя первой степени относительно x:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$$

Слѣдствіе: *по даннымъ корнямъ можно составить квадратное уравненіе;* напр., уравненіе, имѣющее корни **4 и 5**, есть $(x-5)(x-4)=0$; раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ $x^2-9x+20=0$. Уравненіе, имѣющее корни -2 и -1, есть: $[x-(-2)][x-(-1)]=0$, т.-е. $(x+2)(x+1)=0$ или $x^2+3x+2=0$.

Примѣръ 1. *Разложить* $2x^2-2x-12$.

Такъ какъ корни трехчлена суть 3 и -2, то:

$$2x^2-2x-12=2(x-3)[x-(-2)]=2(x-3)(x+2).$$

Примѣръ 2. *Разложить* $3x^2+x+1$.

Такъ какъ корни трехчлена суть

$$\frac{-1+\sqrt{-11}}{6} \text{ и } \frac{-1-\sqrt{-11}}{6}, \text{ то:}$$

$$3x^2+x+1=3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)$$

$$=3\left(\frac{6x+1-\sqrt{-11}}{6}\right)\left(\frac{6x+1+\sqrt{-11}}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(6x+1-\sqrt{-11})(6x+1+\sqrt{-11}).$$

Примѣръ 3. *Разложить* $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2$.

Найдя корни этого трехчлена, получимъ:

$$x_1=\frac{b^2}{2a} \quad x_{11}=\frac{a^2}{3b}$$

Поэтому: $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2=6ab\left(x-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2}{3b}\right)=$

$$=6ab\left(\frac{2ax-b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx-a^2}{3b}\right)=(2ax-b^2)(3bx-a^2).$$

Примѣръ 4. *Разложить* $(a^2-1)(b^2+1)-2b(a^2+1)$.

Замѣтивъ, что данное выраженіе есть трехчленъ 2-й степени относительно буквы b, представимъ его въ такомъ видѣ:

$$(a^2-1)b^2-2(a^2+1)b+(a^2-1)$$

Корни этого трехчлена будутъ (§ 194, зам. 2):

$$b_1=\frac{a^2+1+\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1+2a}{a^2-1}=\frac{a+1}{a-1}$$

$$b_{11}=\frac{a^2+1-\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1-2a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}.$$

Слѣдов., данный трехчленъ представится такъ:

$$(a^2-1)\left(b-\frac{a+1}{a-1}\right)\left(b-\frac{a-1}{a+1}\right)=[b(a-1)-(a+1)][b(a+1)-(a-1)]$$
$$=(ab-b-a-1)(ab+b-a+1).$$

Примѣръ 5. *Найти истинное значенiе дроби:*

$$\frac{2a^2-2a-12}{3a^2+a-10}$$

при $a=-2$.

Подставивъ на мѣсто a число -2, находимъ, что дробь принимаетъ неопредѣленный видъ $^0/_0$. Чтобы раскрыть истинный смыслъ этого выраженiя, разложимъ числителя и знаменателя на множителей и затѣмъ, если можно, сократимъ дробь. Такъ какъ корни числителя суть 3 и -2, а корни знаменателя $^5/_3$ и -2, то дробь представится такъ:

$$\frac{2(a-3)\,(a+2)}{3(a-{}^5/_3)(a+2)}=\frac{2a-6}{3a-5},$$

что при $a=-2$ даетъ число $^{10}/_{11}$.

ГЛАВА II.

Нѣкоторые частные случаи квадратныхъ уравненiй.

199. Случай, когда коэффицiентъ a очень малъ. Вычисленiе корней ур. $ax^2+bx+c=0$ по общей формулѣ, выведенной выше, затруднительно въ томъ случаѣ, когда коэффицiентъ a очень малое число сравнительно съ b и c. Въ самомъ дѣлѣ, вычисляя корни по формулѣ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

мы въ большинствѣ случаевъ должны довольствоваться приближенной величиной $\sqrt{b^2-4ac}$, а слѣд., и всего числителя. Раздѣливъ эту приближен-

ную величину на $2a$, мы тѣмъ самымъ раздѣлимъ на $2a$ и погрѣшность, съ которой вычисленъ числитель формулы. Но такъ какъ, по предположенію, $2a$ очень малая дробь, а дѣленіе на малую дробь равносильно умноженію на большое число, то погрѣшность значительно возрастаетъ, вслѣдствіе чего окончательный результатъ будетъ далекъ отъ истиннаго. Если напр., $2a=0{,}00001$, и мы вычислили $\sqrt{b^2-4ac}$ до четвертаго десятичнаго знака, то предѣлъ погрѣшности въ окончательномъ результатѣ будетъ $0{,}0001 : 0{,}00001=10$.

Для вычисленія корней уравненія въ этомъ случаѣ употребляется болѣе удобный способъ такъ называемаго *послѣдовательнаго приближенія.*

Замѣтимъ, что при очень малой величинѣ a одинъ изъ корней уравненія немного отличается отъ $-c/b$, а другой—весьма большое число (по абсолютной своей величинѣ). Дѣйствительно, уравненіе $ax^2+bx+c=0$ равносильно такому уравненію:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=0$$

которому можно придать видъ.

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

Такъ какъ $-a$ близко къ нулю, то послѣднее уравненіе можетъ быть удовлетворено такими значеніями x, при которыхъ одинъ изъ сомножителей лѣвой части уравненія окажется очень малымъ числомъ, а другой—не очень большимъ; это будетъ имѣть мѣсто или тогда, когда придадимъ x весьма большое абсолютное значеніе, или же тогда, когда x будетъ близокъ къ $-c/b$.

Покажемъ, какъ вычислить тотъ изъ корней, который мало отличается отъ $-c/b$ (другой корень найдемъ, вычитая первый изъ $-b/a$).

Изъ уравненія выводимъ:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}. \qquad [1]$$

Такъ какъ a очень малое число, а x и b не очень велики и не очень малы, то абсолютная величина дроби ax^2/b очень мала. Пренебрегая этимъ членомъ, получимъ для x *первое приближеніе*:

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе въ правую часть ур. [1], получимъ *второе приближеніе*, болѣе точное, чѣмъ первое:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

Вставивъ эту величину въ первую часть ур. [1], получимъ *третье приближеніе*, еще болѣе точное. Подобнымъ же путемъ можемъ получить если нужно, четвертое и слѣдующія приближенія.

Примѣры: 1) *Рѣшить уравненіе* $0{,}003x^2+5x-2=0$.

$$x=\frac{2}{5}-\frac{0{,}003x^2}{5}=0{,}4-0{,}0006x^2.$$

Первое приближеніе$=0{,}4$. Это число болѣе истиннаго значенія x, потому что намъ пришлось отбросить *отрицательный* членъ $-0{,}0006x^2$.

Второе приближеніе$=0{,}4-0{,}0006(0{,}4)^2=0{,}399904$. Это число менѣе истиннаго значенія x, потому что для полученія его мы подставили вмѣсто x^2 число, большее x^2, отчего вычитаемое увеличилось, а разность уменьшилась.

Третье приближеніе оказалось бы больше истиннаго значенія x, четвертое меньше и т. д.

Такъ какъ $0{,}4>x>0{,}399904$, то, взявъ вмѣсто x одно изъ этихъ приближеній, сдѣлаемъ ошибку менѣе $0{,}4-0{,}399904$, т.-е. менѣе $0{,}0001$. Другой корень получится вычитаніемъ найденнаго корня изъ $\frac{-5}{0{,}003}=-1666{,}(6)$. Если для перваго корня возьмемъ число $0{,}4$, то другой$=-1667{,}0(6)$.

2) *Рѣшить уравненіе* $0{,}007x^2-x+2=0$.

$$x=2+0{,}007x^2.$$

Первое приближеніе$=2$ (съ недостаткомъ)

Второе приближеніе$=2+0{,}007\ (2)^2=2{,}028$ (съ недост.)

Третье приближеніе$=2{,}028789488$ (съ недост.)

Сравнивая второе приближеніе съ третьимъ, видимъ, что у нихъ первые три десятичные знака одинаковы; отсюда заключаемъ, что, положивъ $x=2{,}028$, сдѣлаемъ ошибку менѣе $0{,}001$.

200. Случай, когда c очень малое число. Способъ послѣдовательнаго приближенія примѣнимъ и тогда, когда свободный членъ уравненія очень малое число сравнительно съ a и b. Въ этомъ случаѣ одинъ изъ корней близокъ къ $-{}^b/_a$, а другой—весьма малое количество. Въ этомъ нетрудно убѣдиться, если уравненію придать такой видъ:

$$x(ax+b)=-c.$$

Такъ какъ, по предположенію, абсолютная величина $-c$ очень мала, то уравненіе, очевидно, удовлетворится при x, или очень близкомъ къ 0, или мало отличающемся отъ $-{}^b/_a$.

Чтобы найти корень, имѣющій очень малую величину, представимъ уравненіе снова въ видѣ:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b} \qquad [1]$$

Такъ какъ a и b суть числа не очень большія и не очень малыя, а абсолютная величина x^2 очень мала, то для перваго приближенія можно пренебречь членомъ ax^2/b; тогда получимъ:

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе на мѣсто x въ правую часть уравненія [1], получимъ второе приближеніе; подобнымъ же образомъ найдемъ, если нужно, и слѣдующія приближенія.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $2x^2+x-0,003=0$.

$$x=0,003-2x^2$$

Первое приближеніе$=0,003$ (съ избыткомъ).

Второе приближеніе$=0,003-2(0,003)^2=0,002982$ (съ недост.)

Третье приближеніе$=0,002982215352$ (съ изб.)

Положивъ $x=0,002982$, сдѣлаемъ ошибку менѣе 1 милліонной. Другой корень уравненія$=-0,5-0,002982=-0,502982$.

ГЛАВА III.

Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.

201. Когда корни бываютъ вещественные, неравные и равные, и когда они бываютъ мнимые. Значеніе этихъ корней. Мы видѣли, что корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ выражаются формулами:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Такъ какъ въ этихъ формулахъ число a можно всегда предполагать положительнымъ (§ 189), то:

если **с** *число отрицательное, то оба корня вещественные*, потому что при этомъ условіи выраженіе b^2-4ac даетъ положительное число;

если с *число положительное, то корни могутъ быть или оба вещественные (когда* $b^2 \geqq 4ac$*), или оба мнимые (когда* $b^2 < 4ac$). Въ послѣднемъ случаѣ задача, изъ условій которой выведено уравненіе, должна быть признана невозможною.

Вещественные корни могутъ быть неравные и равные (послѣднее, когда $b^2-4ac=0$), оба положительные, оба отрицательные, или одинъ положительный, а другой отрицательный. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось при изслѣдованіи уравненія 1-й степени.

202. Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при a=0. При выводѣ общей формулы для корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, мы приводили его въ виду $x^2+px+q=0$, для чего намъ нужно было раздѣлить всѣ члены уравненія на a (§ 194). Но дѣленіе на a возможно лишь въ томъ случаѣ, когда a не равно 0. Слѣд., формулы:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

выведены въ предположеніи, что a не равно 0, и потому нельзя заранѣе требовать, чтобы онѣ давали вѣрные результаты при $a=0$. Однако посмотримъ, во что онѣ обратятся при этомъ предположеніи. Подставивъ въ нихъ на мѣсто a нуль, получимъ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0} \quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}$$

Такъ какъ знакомъ $\sqrt{}$ мы условились обозначать только ариѳметическое значеніе корня, то $\sqrt{b^2}$ равенъ b въ томъ случаѣ, когда b есть число положительное; если же b число отрицательное, то $\sqrt{b^2}=-b$; напр., если $b=-5$, то $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$. Поэтому:

$$\text{При } b \text{ положительномъ} \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0} \\ x_{11}=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty \end{cases}$$

$$\text{При } b \text{ отрицательномъ} \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty \\ x_{11}=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0} \end{cases}$$

Значитъ, при $a=0$ одинъ изъ корней обращается въ $\frac{0}{0}$, а другой, въ ∞.

Выраженіе $^0/_0$ можетъ иногда означать, какъ мы видѣли, *кажущуюся* неопредѣленность, вслѣдствіе присутствія въ числителѣ и знаменателѣ нѣкотораго множителя, обращающагося въ 0. Въ разсматриваемомъ случаѣ такой множи-

тель, дѣйствительно, существуетъ. Чтобы сдѣлать его явнымъ, уничтожимъ ирраціональность въ числителѣ того выраженія, изъ котораго получилось неопредѣленное выраженіе. Положимъ, что выраженіе $^0/_0$ получилось для x_1 (при b положительномъ); тогда умножимъ числителя и знаменателя дроби, дающей величину для x_1, на количество $-b-\sqrt{b^2-4ac}$:

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=$$

$$=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Сокративъ полученную дробь на $2a$, будемъ имѣть:

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Положивъ теперь $a=0$, получимъ: $x_1=\frac{2c}{-2b}=-\frac{c}{b}$.

Если неопредѣленное выраженіе получается для x_{11} (при b отрицательномъ), то числителя и знаменателя дроби для x_{11} придется умножить на $-b+\sqrt{b^2-4ac}$; тогда, снова сократив на $2a$, получимъ:

$$x_{11}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

что при $a=0$ даетъ: $x_{11}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2}}=\frac{2c}{-b-b}=\frac{2c}{-2b}=-\frac{c}{b}$.

Итакъ, при $a=0$ общая формула даетъ два значенія:

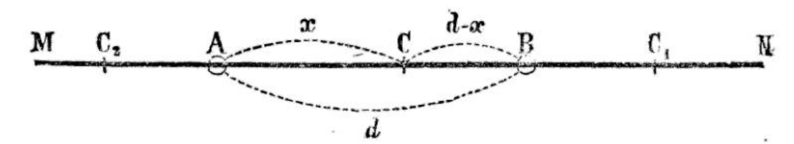
$$x_1 \text{ или } x_{11}=-\frac{c}{b},\ x_{11} \text{ или } x_1=\infty.$$

Первое изъ этихъ значеній есть то самое, какое мы получаемъ прямо изъ уравненія $ax^2+bx+c=0$, сдѣлавъ въ немъ $a=0$, т.-е. изъ уравненія $bx+c=0$. Второе значеніе x должно понимать такъ: *если въ уравненіи* $ax^2+bx+c=0$ *коэффиціентъ* a *уменьшается, приближаясь какъ угодно близко къ* 0, *то абсолютная величина одного изъ корней безпредѣльно увеличивается.*

203. Задача о двухъ источникахъ свѣта. Чтобы на примѣрѣ указать значеніе различныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться при рѣшеніи квадратнаго уравненія, изслѣдуемъ слѣдующую задачу о двухъ источникахъ свѣта:

На прямой MN *въ точкахъ* A *и* B *находятся два источника свѣта. На разстояніи одного метра сила свѣта перваго источника равна* a *свѣчамъ, а второго равна* b *свѣчамъ. Разстояніе между* A *и* B *равно* d *метр. Найти на прямой* MN *такую точку, въ которой освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ было бы одинаковое.*

Искомая точка можетъ находиться: или между A и B, или налѣво отъ A, или же направо отъ B. Сдѣлаемъ предположеніе, что она лежитъ между A и B; напр., пусть это будетъ точка C, отстоящая отъ A на x футовъ.



Изъ физики извѣстно, что степень освѣщенія, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника свѣта, т.-е., если освѣщаемый предметъ удалить отъ источника свѣта на разстояніе въ 2, 3, 4 и т. д. раза большее, то степень освѣщенія уменьшится въ 4, 9, 16 и т. д. разъ. Принявъ этотъ законъ во вниманіе, будемъ разсуждать такъ: если бы точка C отстояла отъ A только на 1 метръ, то она освѣщалась бы этимъ источникомъ такъ, какъ будто на нее падали лучи отъ a свѣчей; но такъ какъ она отстоитъ отъ A на x метр., то степень ея освѣщенія этимъ источникомъ будетъ $\frac{a}{x^2}$. Подобнымъ же разсужденіемъ найдемъ, что точка C, отстоя отъ источника свѣта B на $d-x$ метр., будетъ освѣщаться имъ съ силою $\frac{b}{(d-x)^2}$. Вопросъ задачи требуетъ, чтобы

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}. \qquad [1]$$

Откуда: $a(d-x)^2=bx^2$, т.-е. $ad^2-2adx+ax^2-bx^2=0$

$$(a-b)x^2-2adx+ad^2=0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x дѣлится на 2, то (§ 194, замѣч. 2):

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)ad^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Слѣдовательно: $x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $x_{11}=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. *)

Изслѣдованіе. Такъ какъ a и b числа положительныя, то мнимыхъ рѣшеній въ этой задачѣ быть не можетъ.

1) *Если $a>b$, то оба корня положительные*, при чемъ, такъ какъ $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$, то $x_1>d$, а $x_{11}<d$.

Второе рѣшеніе соотвѣтствуетъ предположенію, что искомая точка находится между A и B; первое же рѣшеніе ему противорѣчитъ. Чтобы принять или отвергнуть это рѣшеніе, мы должны разсмотрѣть, какое уравненіе получится, если сдѣлаемъ предположеніе, что искомая точка находится направо отъ B (напр., въ C_1), на разстояніи x отъ A. Тогда, попрежнему, степень освѣщенія ея источникомъ A будетъ

---

*) Уравненіе [1] можно было бы рѣшить иначе. Извлекая изъ обѣихъ частей уравненія квадратные корни, получимъ:

$$\pm\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Не трудно видѣть, что это уравненіе приводится къ 2 уравненіямъ первой степени:

$$1).\ \frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{d-x}\ \text{и}\ 2)\ \frac{\sqrt{a}}{x}=-\frac{\sqrt{b}}{d-x}=\frac{\sqrt{b}}{x-d}.$$

Первое даетъ: $d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=x\sqrt{b}$; откуда: $x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Второе даетъ: $x\sqrt{a}-d\sqrt{a}=x\sqrt{b}$; откуда: $x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

$\frac{a}{x^2}$; отъ источника B точка C_1 находится на разстояніи $x-d$ метр.; поэтому степень освѣщенія ея этимъ источникомъ выразится $\frac{b}{(x-d)^2}$, и уравненіе будетъ:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2}$$

Сравнивая это уравненіе съ ур. [1], находимъ, что они одинаковы, такъ какъ $(d-x)^2=(x-d)^2$. Замѣтивъ это, можемъ утверждать, что оба положительныя рѣшенія ур. [1] удовлетворяютъ задачѣ.

2) *Если* $a<b$, *то* x_1 *отрицательное число, а* x_{11} *положительное*, причемъ $x_{11}<d$. Положительное рѣшеніе соотвѣтствуетъ предположенію, что искомая точка находится между A и B. Чтобы уяснить смыслъ отрицательнаго рѣшенія, перемѣнимъ въ ур. [1] x на $-x$:

$$\frac{a}{(-x)^2}=\frac{b}{(d+x)^2} \text{ или } \frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2} \qquad [3]$$

Уравненіе [3] имѣетъ тѣ же корни, что и ур. [1], только съ обратными знаками. Значитъ, отрицательное рѣшеніе ур. [1] равно по абсолютной величинѣ положительному рѣшенію ур. [3]. Но это послѣднее соотвѣтствуетъ той же задачѣ, только иному предположенію, а именно, что искомая точка находится налѣво отъ A. Дѣйствительно, если допустимъ, что искомая точка есть C_2, отстоящая отъ A на x футовъ, то найдемъ, что степень освѣщенія ея источникомъ A равна $\frac{a}{x^2}$, а источникомъ B равна $\frac{b}{(d+x)^2}$; слѣд., ур. (3) удовлетворяетъ этому предположенію.

Итакъ, отрицательное значеніе, полученное для x_1, означаетъ, что абсолютное число метровъ, выражаемое формулой

$$x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

должно откладывать въ направленіи, противоположномъ тому въ какомъ считается положительное рѣшеніе.

3) *Если* $a=b$, *то* $x_1=\pm\infty$ и $x_{11}=d/2$. Первое рѣшеніе означаетъ, что по мѣрѣ того, какъ a приближается къ равенству съ b, искомая точка безпредѣльно удаляется или направо отъ A, или налѣво отъ A, смотря по тому, будетъ ли a, приближаясь къ b, оставаться больше или меньше b. Второе рѣшеніе показываетъ, что при равенствѣ силъ источниковъ свѣта искомая точка лежитъ посрединѣ между ними.

4) *Если* $d=0$, *причемъ* $a\neq b$, *то* $x_1=x_{11}=0$. Это значитъ, что если разстояніе между двумя неравными источниками свѣта уменьшается, приближаясь къ 0, то обѣ равно освѣщенныя точки неограниченно приближаются къ источнику A.

5) *Если* $d=0$, *и* $a=b$, *то* $x_1=\frac{0}{0}$, $x_{11}=0$. Такъ какъ числитель и знаменатель дроби, опредѣляющей величину x_1, не содержитъ никакого общаго множителя, обращающагося въ 0 при сдѣланныхъ предположеніяхъ, то надо ожидать, что значеніе x_1 означаетъ *неопредѣленность* задачи. И дѣйствительно, если источники свѣта одинаковой силы и помѣщены въ одномъ мѣстѣ, то всякая произвольная точка будетъ ими одинаково освѣщена.

Замѣчаніе. Такъ какъ ур. [1] содержитъ въ знаменателяхъ неизвѣстное, то, приводя его къ цѣлому виду, мы должны рѣшить вопросъ, не имѣетъ ли оно особаго корня $x=\infty$ (см. § 94). Приведя члены уравненія къ одному знаменателю и перенеся ихъ въ одну часть, получимъ уравненіе:

$$\frac{a(d-x)^2-bx^2}{x^2(d-x)^2}=0 \text{ или } \frac{(a-b)^2-2adx+ad^2}{x^4-2dx^3+d^2x^2}=0$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то уравненіе сверхъ корней, разсмотрѣнныхъ выше, имѣетъ еще корень $x=\pm\infty$. Это третье рѣшеніе разсматриваемой задачи означаетъ, что если брать точки, все болѣе и болѣе удаленныя отъ A, вправо или влѣво, то разность освѣщеній въ этихъ точкахъ двумя источниками свѣта будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться, приближаясь къ 0. $x=\pm\infty$

ГЛАВА IV.

Мнимыя количества.

204. Цѣль введенія въ алгебру мнимыхъ количествъ. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа представляетъ собою, какъ мы видѣли (§ 145,3), такъ называемое *мнимое количество*. Разсмотримъ подробнѣе такія мнимыя количества, которыя выражаются корнемъ квадратнымъ изъ отрицательнаго числа.

Введеніе въ алгебру мнимыхъ количествъ вызвано соображеніями, подобными тѣмъ, по которымъ въ нее допущены отрицательныя числа: и тѣ, и другія имѣютъ цѣлью *обобщить* нѣкоторыя алгебраическія предложенія или формулы. Напр., допустивъ мнимыя количества, мы можемъ утверждать, что квадратное уравненіе имѣетъ *всегда* два корня; также, что трехчленъ 2-й степени разлагается *всегда* на два множителя 1-й степени. Особенно важное значеніе имѣютъ мнимыя количества въ теоріи уравненій высшихъ степеней.

205. Условія, подъ которыми вводятъ мнимыя количества. Этихъ условій два:

1) Согласились разсматривать $\sqrt{-a}$, гдѣ $-a$ отрицательное число, какъ такое количество, квадратъ котораго равенъ $-a$.

2) Согласились производить надъ мнимыми количествами дѣйствія по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ количествами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2=-a$.

206. Приведеніе $\sqrt{-a}$ къ виду $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Мнимое количество вида $\sqrt{-a}$ можно замѣнить другимъ: $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, $\sqrt{-a}$, согласно 1-му условію, есть такое количество, квадратъ котораго равенъ $-a$. Но $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ также есть такое количество, квадратъ котораго равенъ $-a$, потому что, примѣняя къ этому выраженію правило о возвышеніи въ степень произведенія, получимъ:

$$(\sqrt{a}\sqrt{-1})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{-1})^2=a(-1)=-a.$$

Условились сокращенно обозначать $\sqrt{-1}$ одною буквою i (начальная буква слова *imaginaire*, что значитъ мнимый). Такимъ образомъ пишутъ:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i;\ \sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=i\sqrt{3}.$$

Приведеніе мнимаго количества къ виду, содержащему множителя i, яснѣе обозначаетъ мнимость радикала, которая иногда можетъ быть не вполнѣ явною.

207. Различныя степени $\sqrt{-1}$. Замѣтимъ, что, возвышая i въ различныя степени, мы можемъ получить только слѣдующія 4 различныя значенія:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2i=(-1)i=-i,\ i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=+1$$

Дѣйствительно, пусть требуется возвысить i въ n-ую степень; раздѣливъ n на 4, мы можемъ получить въ остаткѣ только одно изъ слѣдующихъ 4 чиселъ: 0, 1, 2, 3; поэтому, обозначивъ частное отъ дѣленія n на 4 черезъ m, можемъ положить:

$$n=4m;\ n=4m+1;\ n=4m+2;\ n=4m+3.$$

Но
$$i^{4m}=(i^4)^m=(+1)^m=1;\ i^{4m+1}=i^{4m}i=i$$
$$i^{4m+2}=i^{4m}i^2=i^2=-1;\ i^{4m+3}=i^{4m}i^3=-i$$

Такимъ образомъ: $i^{27}=i^{4\cdot 6+3}=i^3=-i$; $i^{17}=i^{4\cdot 4+1}=i$

208. Комплексное количество. Общій видъ всякаго вещественнаго или мнимаго количества есть $a+bi$, гдѣ a и b суть вещественныя числа, положительныя или отрицательныя, а i есть сокращенное обозначеніе $\sqrt{-1}$. Такое выраженіе наз. *комплекснымъ количествомъ*. Если $b=0$, комплексное количество обращается въ вещественное; при $a=0$ оно даетъ мнимое количество.

Два комплексныхъ количества вида: $a+bi$, $a-bi$, наз. *сопряженными*. Подъ такимъ видомъ представляются, какъ мы видѣли, корни квадратнаго уравненія, когда они мнимые.

209. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексныя количества. Условившись надъ комплексными количествами производить дѣйствія и преобразованія по правиламъ, выведеннымъ для вещественныхъ количествъ, при условіи что $i^2=-1$, мы должны будемъ подчинить ихъ слѣдующему началу:

Для того, чтобы количество $a+bi$ *равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы* $a=0$ *и* $b=0$.

Дѣйствительно, совершая надъ равенствомъ $a+bi=0$ преобразованія, дозволительныя для равенствъ съ вещественными членами, и принимая $i^2=-1$, будемъ имѣть:

$$a=-bi,\ a^2=(-bi)^2=b^2i^2=-b^2,\ a^2+b^2=0.$$

Такъ какъ a^2 и b^2 суть числа положительныя, а сумма двухъ положительныхъ чиселъ равняется 0 только тогда, когда каждое изъ нихъ отдѣльно равно 0, то заключаемъ: $a=0$, $b=0$. Обратно, если положимъ, что $a=0$ и $b=0$, то и $a+bi=0$ (принимая умноженіе i на 0 въ томъ же условномъ смыслѣ, въ какомъ оно понимается для вещественныхъ количествъ).

Слѣдствіе: *для того, чтобы количества* $a+bi$ *и* $a'+b'i$ *были равны, необходимо и достаточно, чтобы* $a=a'$ *и* $b=b'$.

Дѣйствительно, изъ равенства: $a+bi=a'+b'i$ выводимъ:

$$(a-a')+(b-b')i=0$$

откуда, на основаніи доказаннаго начала, получимъ:

$$a-a'=0,\ b-b'=0,\ \text{т.-е.}\ a=a',\ b=b'.$$

И обратно: если $a=a'$ и $b=b'$, то $a+bi=a'+b'i$, такъ какъ оба количества въ этомъ случаѣ ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются.

210. Результатъ дѣйствій надъ комплексными количествами. Производя дѣйствія надъ комплексными количествами по правиламъ, выведеннымъ для количествъ вещественныхъ, придемъ къ слѣдующему важному выводу: *результатъ дѣйствій надъ комплексными количествами есть также комплексное количество.*

Мы въ этомъ убѣдимся, разсмотрѣвъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе квадратнаго корня:

1) *Сложеніе:* $(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i=A+Bi$, гдѣ $A=a+a_1$ и $B=b+b_1$.

Если сумма двухъ комплексныхъ количествъ есть комплексное количество, то и сумма какого угодно числа комплексныхъ количествъ подчиняется этому правилу.

2) *Вычитаніе:* $(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)i=A+Bi$, гдѣ $A=a-a_1$ и $B=b-b_1$.

3) *Умноженіе:* $(a+bi)\,(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=(aa_1-$ $-bb_1)+(a_1b+ab_1)i=A+Bi$

гдѣ $A=aa_1-bb_1$ и $B=a_1b+ab_1$.

Если произведеніе двухъ комплексныхъ количествъ есть комплексное количество, то и произведеніе какого угодно числа комплексныхъ количествъ подчиняется этому правилу.

4) *Дѣленіе:* $$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{(aa_1+bb_1)+(a_1b-ab_1)i}{a_1{}^2-(b_1i)^2}$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1{}^2+b_1{}^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1{}^2+b_1{}^2}\,i=A+Bi,$$

гдѣ $A=\dfrac{aa_1+bb_1}{a_1{}^2+b_1{}^2}$ и $B=\dfrac{a_1b-ab_1}{a_1{}^2+b_1{}^2}$.

5) Такъ какъ *возвышеніе въ степень* (цѣлую, положительную) есть частный случай умноженія, то и оно подчиняется тому же правилу.

6) *Извлеченіе квадратнаго корня* изъ комплекснаго количества будетъ разсмотрѣно ниже (§ 218).

211. Приведемъ здѣсь два примѣра, показывающіе, какъ просто иногда доказываются нѣкоторыя истины при помощи комплексныхъ количествъ.

Теорема 1. *Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его есть также сумма двухъ квадратовъ.*

Доказ. Пусть $N=a^2+b^2$; замѣтивъ, что $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$, можемъ писать:

$$N^2=(a+bi)^2(a-bi)^2=(a^2-b^2+2abi)\,(a^2-b^2-2abi)=(a^2-b^2)^2+$$
$$+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Теорема 2. *Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.*

Доказ. Пусть $N=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ и $N_1=a_1^2+b_1^2=(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)$. Въ такомъ случаѣ:

$$NN_1=(a+bi)\ (a-bi)\ (a_1+b_1i)\ (a_1-b_1i).$$

Помноживъ въ этомъ произведенiи перваго сомножителя на третьяго, а второго на четвертаго, найдемъ:

$$NN_1=[aa_1-bb_1+(ab_1+ba_1)i]\ \ [aa_1-bb_1-(ab_1+ba_1)i]=$$
$$=(aa_1-bb_1)^2+(ab_1+ba_1)^2 \qquad [1]$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Если въ томъ же произведенiи помножимъ перваго сомножителя на четвертаго, а второго на третьяго, то получимъ:

$$NN_1=[aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i]\ \ [aa_1+bb_1-(a_1b-ab_1)i]=$$
$$=(aa_1+bb_1)^2+(a_1b-ab_1)^2 \qquad [2]$$

Равенства [1] и [2] показываютъ, что произведенiе NN_1 можетъ быть разложено на сумму двухъ квадратовъ двоякимъ образомъ.

ГЛАВА V.

Освобожденiе уравненiя отъ радикаловъ.

212. Теорема. *Отъ возвышенiя обѣихъ частей уравненiя въ одну и ту же степень получаемъ новое уравненiе, которое сверхъ корней перваго уравненiя можетъ имѣть посторннiе корни.*

Док. Пусть имѣемъ уравненiе $A=B$. Возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, получимъ: $A^2=B^2$. Представимъ это уравненiе въ такомъ видѣ:

$$A^2-B^2=0 \text{ или } (A-B)\ (A+B)=0$$

Послѣднее уравненiе удовлетворяется, во 1, такими значенiями неизвѣстныхъ, при которыхъ $A-B=0$ (т.-е. $A=B$), во 2, такими, при которыхъ $A+B=0$ (т.-е. $A=-B$). Первыя значенiя представляютъ собою корни даннаго уравненiя; вторыя значенiя будутъ для него посторонними корнями.

Вообще, возвысивъ обѣ части уравненiя $A=B$ въ n-ую степень, получимъ:

$$A^n=B^n \text{ или } A^n-B^n=0.$$

Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ произведенiя двухъ множителей (§§ 59 и 60):

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+BA^{n-2}+B^2A^{n-3}+\ldots+B^{n-1}).$$

Слѣд., данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$A-B=0 \text{ и } A^{n-1}+BA^{n-2}+B^2A^{n-3}+\ldots+B^n-=0$$

Первое изъ нихъ есть данное уравненіе; второе доставляетъ посторонія рѣшенія.

Слѣдствіе. *Если для рѣшенія уравненія приходится обѣ его части возвысить въ одну и ту же степень, то, найдя корни полученнаго уравненія, мы должны особымъ изслѣдованіемъ опредѣлить, какіе изъ нихъ годятся для даннаго уравненія;* для этого каждый изъ корней подставляемъ въ данное уравненіе и такимъ образомъ находимъ тѣ изъ нихъ, которые обращаютъ это уравненіе въ тождество.

213. Рѣшеніе уравненія, въ которомъ неизвѣстное входитъ подъ знаки радикаловъ. Чтобы рѣшить такое уравненіе, его должно предварительно освободить отъ радикаловъ. Укажемъ, какъ можно это сдѣлать въ нѣкоторыхъ простѣйшихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ приводимыхъ ниже примѣрахъ знакъ $\sqrt{\quad}$ означаетъ ариѳметическое значеніе корня.

Случай 1, *когда уравненіе содержитъ только одинъ радикалъ какой угодно степени.* Переносятъ всѣ раціональные члены въ одну часть уравненія, оставивъ радикалъ въ другой (*уединяютъ* радикалъ); затѣмъ возвышаютъ обѣ части уравненія въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала.

Примѣръ 1. $\sqrt{x+7}-x-1=0$. Уединимъ радикалъ: $\sqrt{x+7}=x+1$. Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ: $x+7=x^2+2x+1$. Рѣшивъ это уравненіе, получимъ: $x_1=2$, $x_{11}=-3$. Испытавъ эти значенія, находимъ, что данному уравненію удовлетворяетъ только x_1; второе рѣшеніе принадлежитъ уравненію: $-\sqrt{x+7}=x+1$.

Примѣръ 2. $1+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^2-9}}=0$. Приведя уравненіе къ цѣлому виду и уединивъ радикалъ, получимъ: $\sqrt[4]{x^2-9}=-2$. Возвысивъ обѣ части въ четвертую степень, найдемъ:

$$x^2-9=16; \text{ откуда } x=\pm5.$$

Ни одно изъ этихъ рѣшеній не удовлетворяетъ данному уравненію.

Примѣръ 3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}}$

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ и отбросимъ въ обѣихъ частяхъ одинаковые члены $\frac{1}{a^2}$:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}=\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}$$

Послѣ вторичнаго возвышенія въ квадратъ, получаемъ:

$$\frac{1}{x^4}+\frac{4}{ax^3}+\frac{4}{a^2x^2}=\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}$$

Откуда: $$3x^2+4ax-4a^2=0$$

Слѣд., $$x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12a^2}}{3}=\frac{-2a\pm4a}{3}$$

$$x_1=\frac{2a}{3},\ x_{11}=-2a$$

Подстановкою убѣждаемся, что только x_1 удовлетворяетъ данному уравненію.

Случай 2-й, *когда уравненіе содержитъ только одни квадратные радикалы*. Напр., пусть уравненіе, приведенное къ цѣлому виду, содержитъ три радикала: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$, гдѣ a, b и c обозначаютъ какія-либо алгебраическія выраженія, содержащія неизвѣстныя. Желая освободить уравненіе отъ $\sqrt{a}$, вынесемъ этотъ радикалъ за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается, затѣмъ уединимъ его и возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ; этимъ освободимъ уравненіе отъ $\sqrt{a}$ и не введемъ никакихъ новыхъ радикаловъ. Подобно этому освобождаемъ уравненіе отъ $\sqrt{b}$ и затѣмъ отъ $\sqrt{c}$.

Примѣръ: $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1+x}=0$.

Такъ какъ $x+x^2=x(1+x)$, $1-x^2=(1+x)(1-x)$, $x-x^2=x(1-x)$, то, положивъ для краткости: $1+x=a$, $x=b$, $1-x=c$, получимъ уравненіе такого вида:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{a}=0$$

Выносимъ $\sqrt{a}$ за скобки и уединяемъ его:

$$\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+1)=-\sqrt{bc}$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$a(b+c+1+2\sqrt{bc}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c})=bc$$

Выносимъ $\sqrt{b}$ за скобки и уединяемъ его:

$$2a\sqrt{b}(1+\sqrt{c})=bc-ab-ac-a-2a\sqrt{c}=A-2a\sqrt{c}$$

гдѣ $$A=bc-ab-ac-a$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$4a^2b(1+c+2\sqrt{c})=A^2-4aA\sqrt{c}+4a^2c$$

Выносимъ за скобки $\sqrt{c}$ и уединяемъ его:

$$4a\sqrt{c}(2ab+A)=A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc$$

Возвысивъ въ квадратъ, окончательно находимъ:

$$16a^2c(2ab+A)^2=(A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc)^2$$

Подставивъ вмѣсто a, b и c ихъ выраженія, получимъ раціональное уравненіе съ неизвѣстнымъ x.

214. Общій способъ освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала. Пусть данное уравненіе содержитъ $\sqrt[n]{q}$ (гдѣ q есть выраженіе, заключающее неизвѣстныя), причемъ этотъ радикалъ можетъ входить въ уравненіе въ различныхъ степеняхъ, т.-е. въ немъ могутъ встрѣчаться: $\sqrt[n]{q}, \sqrt[n]{q^2}=(\sqrt[n]{q})^2, \sqrt[n]{q^3}=(\sqrt[n]{q})^3$ и т. д. Обозначивъ для краткости $\sqrt[n]{q}$ черезъ x, можемъ положить:

$$\sqrt[n]{q}=x,\ \sqrt[n]{q^2}=x^2,\ \sqrt[n]{q^3}=x^3\ldots$$

Предположимъ далѣе, что, замѣнивъ въ уравненіи различныя степени $\sqrt[n]{q}$ соотвѣтственными степенями x, мы получимъ уравненіе вида *раціональнаго и цѣлаго относительно* x. Къ такому виду всегда можетъ быть приведено уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ немъ были члены, дробные относительно $\sqrt[n]{q}$, мы могли бы предварительно освободить его отъ знаменателей; далѣе, если бы $\sqrt[n]{q}$ стоялъ подъ знакомъ другого радикала (т.-е. уравненіе содержало бы *сложные* радикалы), мы тогда обозначили бы черезъ x этотъ сложный радикалъ, съ цѣлью предварительно освободиться отъ него.

Если въ уравненіи встрѣтятся члены, содержащіе x съ показателемъ большимъ или равнымъ n, мы можемъ въ каждомъ изъ нихъ сдѣлать показателя меньшимъ n, основываясь на равенствѣ: $x^n=q$. Такъ:

$$x^{n+1}=x^nx=qx;\ x^{n+2}=x^nx^2=qx^2 \text{ и т. д.}$$

Понизивъ такимъ образомъ показателей при x вездѣ, гдѣ можно, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots+kx+l=0 \qquad [1]$$

гдѣ a, b, c... k и l могутъ содержать другіе радикалы (нѣкоторыя изъ этихъ количествъ могутъ равняться 0).

Чтобы освободить это уравненіе отъ всѣхъ степеней радикала x, умножимъ обѣ его части на многочленъ степени $n-1$:

$$x^{n-1}+Ax^{n-2}+Bx^{n-3}+\ldots+K$$

въ которомъ всѣ $n-1$ коэффиціентовъ оставимъ пока неопредѣленными. Послѣ умноженія правая часть уравненія будетъ 0, а лѣвая обратится въ многочленъ:

$$ax^{2n-2}+(aA+b)x^{2n-3}+([illegible] +c)x^{2n-4}+\ldots+lK$$

Понизивъ въ этомъ многочленѣ показателей при x во всѣхъ членахъ, гдѣ эти показатели больше или равны n, и соединивъ въ одинъ всѣ члены, содержащіе одинаковыя степени x, получимъ уравненіе вида:

$$Mx^{n-1}+Nx^{n-2}+\ldots+Rx+S=0 \qquad [2]$$

гдѣ M, N... и S суть выраженія первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ A, B, C... K (какъ легко видѣть изъ разсмотрѣнія процесса полученія этихъ выраженій).

Составимъ теперь $n-1$ уравненій первой степени съ $n-1$ неизвѣстными A, B, C... K:

$$M=0,\ N=0,\ldots\ R=0.$$

Рѣшивъ эти уравненія и вставивъ найденныя значенія неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ ур. [2], получимъ уравненіе, не содержащее $\sqrt[n]{q}$:

$$S=0$$

Полезно замѣтить, что это уравненіе обладаетъ вообще посторонними рѣшеніями, именно тѣми, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$x^{n-1}+Ax^{n-2}+Bx^{n-3}+\ldots K=0.$$

Если въ уравненіи встрѣчаются другіе радикалы, мы тѣмъ же пріемомъ уничтожимъ послѣдовательно и ихъ.

Примѣръ 1. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+b=9$; $\sqrt[3]{a}=x$; $\sqrt[3]{a^2}=x^2$

$$(x^2+x+b)\ (x^2+Ax+B)=x^4+(A+1)x^3+(B+A+b)x^2+(B+bA)x+bB=ax+(A+1)a+(B+A+b)x^2+(B+bA)x+bB=(B+A+b)x^2+(B+bA+a)x+bB+(A+1)a=0.$$

Положимъ, что $\begin{cases} B+A+b=0 \\ B+bA+a=0 \end{cases}$ т.-е. $\begin{cases} B+A=-b \\ B+bA=-a \end{cases}$

найдемъ: $A=\dfrac{b-a}{b-1}$ $\quad B=\dfrac{a-b^2}{b-1}$.

Послѣ этого данное уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{b(a-b^2)}{b-1}+\left(\frac{b-a}{b-1}+1\right)a=0$$

Примѣръ 2. $\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+b=0;\ \sqrt[4]{a}=x;\ \sqrt[4]{a^2}=x^2$

$$(x^2-x+b)\ (x^3+Ax^2+Bx+C)=x^5+(A-1)x^4+(B-A+b)x^3+$$
$$+(C-B+bA)x^2+(-C+bB)x+bC=ax+(A-1)a+\ldots=$$
$$=(B-A+b)x^3+(C-B+bA)x^2+(-C+bB+a)x+bC+(A-1)a=0.$$

Положимъ: $\begin{cases} B-A+b=0 \\ C-B+bA=0 \\ -C+bB+a=0 \end{cases}$ т.-е. $\begin{cases} -1.A+1.B+0.C=-b \\ b.A-1.B+1.C=0 \\ 0.A+b.B-1.C=-a \end{cases}$

находимъ по формуламъ § 116:

$$A=\frac{-b-a+b^2}{-1+2b}=\frac{b+a-b^2}{1-2b}$$

$$B=\frac{-a-b^2}{-1+2b}=\frac{a+b^2}{1-2b}$$

$$C=\frac{-a-b^3+ab}{-1+2b}=\frac{a+b^3-ab}{1-2b}$$

Данное уравненіе окончательно приметъ видъ:

$$b^4-2ab^2+a^2-a+4ab=0$$

215. Приведеніе знаменателя дроби къ раціональному виду. Для этой цѣли можетъ служить тотъ же пріемъ, который былъ указанъ для освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ уравненіи $A=0$ достаточно умножить обѣ его части на прилично выбранный многочленъ A_1, то для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ знаменателѣ дроби $\frac{M}{A}$ достаточно умножить M и A на A_1.

Пусть, напр., имѣемъ дробь вида:

$$\frac{M}{\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+b}=\frac{M}{x^2-x+b}$$

Множитель, обращающій знаменателя въ раціональное количество, есть x^3+Ax^2+Bx+C, гдѣ A, B и C опредѣляются такъ, какъ было указано въ примѣрѣ 2-мъ предыд. §. Умноживъ числителя и знаменателя на этого множителя и упростивъ результатъ, получимъ окончательно:

$$\frac{M[(1-2b)\sqrt[4]{a^3}+(b+a-b^2)\sqrt[4]{a^2}+(a+b^2)\sqrt[4]{a}+a+b^3-ab]}{b^4-2ab^2+a^2-a+4ab}$$

ГЛАВА VI.

Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ первой степени.

216. Биквадратное уравненіе. Такъ наз. уравненіе четвертой степени, содержащее неизвѣстное только *въ четныхъ степеняхъ*. Общій видъ его слѣдующій:

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad [1]$$

Такое уравненіе легко приводится къ квадратному посредствомъ вспомогательнаго неизвѣстнаго. Положимъ, что $x^2=y$; тогда $x^4=y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0 \qquad [2]$$

Уравненіе это имѣетъ два корня:

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Подставивъ каждое изъ этихъ значеній въ уравненіе $x^2=y$, найдемъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ слѣдующіе 4 корня:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Если корни y_1 и y_2 вспомогательнаго квадратнаго уравненія [2] окажутся мнимыми (что будетъ при $b^2-4ac<0$), то всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія [1] будутъ также мнимые. Если y_1 и y_2 окажутся вещественные неравные (что будетъ при $b^2-4ac>0$), то могутъ представиться слѣдующіе 3 случая: 1) одинъ изъ корней y_1 и y_2 положителенъ, другой отрицателенъ; въ этомъ случаѣ 2 корня биквадратнаго уравненія вещественные, а два мнимые; 2) оба корня y_1 и y_2 положительны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія вещественные; 3) оба корня y_1 и y_2 отрицательны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія мнимые. Наконецъ, если корни y_1 и y_2 равны (что будетъ при $b^2-4ac=0$),

то 4 корня биквадратнаго уравненія дѣлаются попарно равными:

$$x_1=x_3=+\sqrt{\frac{-b}{2a}};\quad x_2=x_4=-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

и будутъ или всѣ вещественные, или всѣ мнимые.

Примѣръ: $x^4-13x^2+36=0$.

$$x^2=y;\ x^4=y;\ y^2-13y+36=0$$

$$y=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{13\pm5}{2}$$

$$y_1=\frac{13+5}{2}=9;\ y_2=\frac{13-5}{2}=4$$

$$x=\pm\sqrt{y};x_1=+\sqrt{9}=3;\ x_2=-\sqrt{9}=-3;\ x_3=+\sqrt{4}=2,$$

$$x_4=-\sqrt{4}=-2$$

217. Преобразованіе $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Корни квадратнаго уравненія, какъ мы видѣли, выражаются подъ видомъ *сложнаго* радикала $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. Такой радикалъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно представить въ видѣ суммы или разности двухъ *простыхъ* радикаловъ. Чтобы показать это, предварительно докажемъ слѣдующую истину:

Лемма. *Равенство:* $a+\sqrt{b}=a_1+\sqrt{b_1}$, *гдѣ* a, a_1, b *и* b_1 *суть числа соизмѣримыя, а* $\sqrt{b}$ *и* $\sqrt{b_1}$ *числа несоизмѣримыя, возможно только тогда, когда* $a=a_1$ *и* $b=b_1$.

Доказ. Перенеся a_1 изъ правой части въ лѣвую и возвысивъ обѣ части равенства въ квадратъ, получимъ:

$$(a-a_1)^2+b+2(a-a_1)\sqrt{b}=b_1$$

Правая часть этого равенства есть число соизмѣримое; поэтому и лѣвая его часть также должна быть числомъ соизмѣримымъ, что возможно только тогда, когда $a-a_1=0$, т.-е. $a=a_1$, вслѣдствіе чего то же равенство даетъ $b=b_1$.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что равенство:

$$a-\sqrt{b}=a_1-\sqrt{b_1}$$

при тѣхъ же условіяхъ относительно чиселъ a, a_1, b и b_1, возможно только тогда, когда $a=a_1$ и $b=b_1$ *).

---

*) Легко также провѣрить, что при тѣхъ же условіяхъ равенства:

$$a+\sqrt{b}=a_1-\sqrt{b_1}\quad\text{и}\quad a-\sqrt{b}=a_1+\sqrt{b_1}$$

невозможны. Дѣйствительно, поступая съ ними такъ, какъ указано въ текстѣ, мы опять приходимъ къ выводу, что $a=a_1$, $b=b_1$, и тогда эти равенства приводятся къ виду: $a+\sqrt{b}=a-\sqrt{b}$, или $+\sqrt{b}=-\sqrt{b}$, что возможно только тогда, когда $b=o$; но это противорѣчитъ условію, что $\sqrt{b}$ есть несоизмѣримое число.

Возьмемъ теперь сложный радикалъ $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, въ которомъ A и B суть числа соизмѣримыя, а $\sqrt{B}$ число несоизмѣримое (и слѣд., B число положительное). Зададимся вопросомъ, нельзя ли вычисленіе этого сложнаго радикала замѣнить вычисленіемъ нѣсколькихъ простыхъ радикаловъ. Допустимъ, что имѣемъ равенство.

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Опредѣлимъ, при какихъ условіяхъ числа x и y окажутся положительными соизмѣримыми. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}=x+y+\sqrt{4xy}$$

Такъ какъ, по условію, $\sqrt{B}$ есть число несоизмѣримое, то и $\sqrt{xy}$ долженъ быть также числомъ несоизмѣримымъ; поэтому, на основаніи доказанной выше леммы, будемъ имѣть:

$$x+y=A \qquad xy=\frac{B}{4}$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени есть 1, коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ 1-й степени есть—A, а свободный членъ равенъ $\frac{B}{4}$ (§ 197). Значитъ, рѣшивъ уравненіе:

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0$$

найдемъ x и y:

$$x=z_1=\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$$

$$y=z_2=\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Отсюда видно, что x и y только тогда будутъ числа соизмѣримыя положительныя, когда 1) *A есть число положительное* и 2) *A^2-B есть точный квадратъ;* значитъ, только при этихъ условіяхъ радикалъ $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ *можно представить въ видѣ суммы двухъ простыхъ радикаловъ*:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad [1]$$

Подобнымъ же образомъ выведемъ, что при тѣхъ же условіяхъ:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad [2]$$

Примѣры: 1) $\sqrt{10+\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+7}{2}}+\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2}$

2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-2}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

3) $\sqrt{\frac{9}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9+\sqrt{32}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{\frac{9+7}{2}}+\sqrt{\frac{9-7}{2}}}{\sqrt{11}}=$

$=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{88}+\sqrt{11}}{11}$

4) $a_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^{\,2}}{4}}}=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-a_n^{\,2}r^2}}$

(Извѣстная геометрическая формула удвоенія числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника).

Здѣсь $A=2r^2$, $B=4r^4-a^2_nr^2$; $\sqrt{A^2-B}=a_nr$; поэтому

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{2r^2+a_nr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-a_nr}{2}}=\sqrt{r\left(r+\frac{a_n}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a_n}{2}\right)}$$

Замѣчаніе. Равенства [1] и [2] остаются вѣрными и тогда, когда A^2-B не есть точный квадратъ и даже тогда, когда A и B не суть числа соизмѣримыя; но тогда эти равенства не представляютъ практическаго интереса.

218. Преобразованіе $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$. Не трудно убѣдиться, что равенства [1] и [2] предыдущаго § остаются вѣрными и тогда, когда B замѣнимъ на $-B$. Дѣйствительно, въ этомъ предположеніи равенство [1] даетъ:

$$\sqrt{A+\sqrt{-B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B}+A}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B}-A}{2}}\sqrt{-1}$$

Чтобы провѣрить это равенство, возвысимъ обѣ его части въ квадратъ:

$$A+\sqrt{-B}=\frac{\sqrt{A^2+B}+A}{2}-\frac{\sqrt{A^2+B}-A}{2}+$$

$$+2\sqrt{\frac{(\sqrt{A^2+B})^2-A^2}{4}}\sqrt{-1}=A+2\sqrt{\frac{B}{4}}\sqrt{-1}=$$

$$=A+\sqrt{B}\sqrt{-1}$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся въ вѣрности и равенства (2).

Вслѣдствіе этого можемъ написать:

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt{a+\sqrt{-b^2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\sqrt{a-\sqrt{-b^2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\sqrt{-1}$$

Примѣры: 1) $\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{15+144}+5}{2}}+$

$$+\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{18}{2}}+\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{-1}=3+2\sqrt{-1}$$

$$2)\ \sqrt{-1}=\sqrt{0+1\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\sqrt{-1}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

$$3)\ \sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{0-1\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

219. Возвратное уравненіе 4-й степени. Такъ наз. уравненіе:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

у котораго коэффиціенты, равностоящіе отъ начала и конца, одинаковы. Чтобы рѣшить такое уравненіе, раздѣлимъ обѣ его части на x^2 (мы имѣемъ право это сдѣлать, такъ какъ x не равно 0):

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0.$$

или:
$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Положимъ, что $x+\frac{1}{x}=y$, тогда: $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$ и, слѣдовательно, x^2+ $+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; подставивъ эти величины въ уравненіе, получимъ:

$$a(y^2-2)+by+c=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ два значенія для y; пусть это будутъ: $y_1=\alpha$ и $y_{11}=\beta$; тогда:

$$x+\frac{1}{x}=\alpha \text{ и } x+\frac{1}{x}=\beta$$

или:
$$x^2-\alpha x+1=0 \text{ и } x^2-\beta x+1=0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій найдемъ 4 рѣшенія даннаго уравненія.

220. Болѣе общій случай уравненія 4-й степени. Подобнымъ же пріемомъ можно рѣшить уравненіе 4-й степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

если коэффиціенты a, b, d и e удовлетворяютъ пропорціи:

$$a:e=b^2:d^2$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этой пропорціи находимъ: $e=\frac{ad^2}{b^2}$

и, слѣд., уравненіе принимаетъ видъ: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{ad^2}{b^2}=0$

Раздѣливъ всѣ члены на x^2, можемъ уравненіе представить такъ:

$$a\left(x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0$$

Если положимъ, что $x+\frac{d}{bx}=y$, то $x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=y^2-\frac{2d}{b}$, и уравненіе превращается въ квадратное:

$$a\left(y^2-\frac{2d}{b}\right)+by+c=0.$$

Найдя y, легко опредѣлимъ потомъ и x.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $2x^4-15x^3+40x^2-45x+18=0$

Замѣтивъ, что $2:18=(-15)^2:(-45)^2$, раздѣлимъ всѣ члены уравненія на x^2 и представимъ его въ видѣ:

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-15\left(x+\frac{3}{x}\right)+40=0.$$

Если положимъ, что $x+\frac{3}{x}=y$, то $x^2+\frac{9}{x^2}=y^2-6$, и уравненіе будетъ:

$$2(y^2-6)-15y+40=0 \text{ или: } 2y^2-15y+28=0.$$

Откуда:
$$y_1=4 \text{ и } y_{11}=\frac{7}{2}.$$

Значенія x предѣляются уравненіями:

$$x+\frac{3}{x}=4 \text{ и } x+\frac{3}{x}=\frac{7}{2}$$

изъ которыхъ находимъ: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=\frac{3}{2}$.

221 Уравненія, у которыхъ лѣвая часть разлагается на множителей, а правая есть 0. Такъ какъ произведеніе можетъ равняться 0 только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ 0, то рѣшеніе уравненія вида: $ABC...=0$ приводится къ рѣшенію уравненій болѣе низкихъ степеней: $A=0$, $B=0$, $C=0$...

Примѣры.

1) $ax^3+bx^2+cx=0$. Представивъ уравненіе въ видѣ:

$$x(ax^2+bx+c)=0$$

замѣтимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x=0 \text{ и } ax^2+bx+c=0.$$

2) $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Это уравненіе можно представить такъ:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$$

Но $x^3+1=x^3+x^2-x^2+1=x^2(x+1)-(x+1)(x-1)$ $=(x+1)(x^2-x+1)$; поэтому уравненіе можемъ написать:

$$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія:

$$x+1=0 \text{ и } ax^2-(a-b)x+a=0$$

Откуда легко получимъ три значенія для x.

222. Зная одинъ корень уравненія, можемъ понизить его степень на 1. Пусть имѣемъ уравненіе: $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots=0$ и положимъ, что одинъ корень его извѣстенъ, напр., $x=\alpha$. Въ такомъ случаѣ лѣвая часть уравненія дѣлится на $x-\alpha$ (§ 58, слѣдствіе). Раздѣливъ въ самомъ дѣлѣ, получимъ въ частномъ многочленъ степени $(m-1)$-й. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, то предложенное уравненіе можно представить такъ: $(x-\alpha)\,Q=0$, гдѣ Q есть частное отъ дѣленія лѣвой части уравненія на $x-\alpha$. Теперь очевидно, что данное уравненіе распадается на два: $x-\alpha=0$ и $Q=0$. Послѣднее уравненіе есть $m-1$ степени.

Примѣръ. $x^3-15x^2+56x-60=0$

Замѣтивъ, что уравненіе удовлетворяется при $x=10$, дѣлимъ его лѣвую часть на $x-10$; въ частномъ получаемъ x^2-5x+6; послѣ этого уравненіе представляемъ такъ:

$$(x-10)(x^2-5x+6)=0$$

откуда:

$$x_1=10,\ x_2=2,\ x_3=3$$

223. Двучленныя уравненія. Такъ наз. уравненія вида: $ax^m+b=0$*). При помощи вспомогательнаго неизвѣстнаго эти уравненія всегда можно освободить отъ коэффиціента при неизвѣстномъ и, кромѣ того, обратить свободный членъ въ ± 1.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ обѣ части уравненія на a и обозначивъ *абсолютную величину* дроби $\frac{b}{a}$ черезъ q, получимъ:

$$x^m \pm q = 0$$

Положимъ теперь, что $x=y\sqrt[m]{q}$, гдѣ $\sqrt[m]{q}$ есть ариѳметическое значеніе корня m-й степени изъ q; тогда $x^m=qy^m$, и уравненіе приметъ видъ:

$$qy^m \pm q=0, \text{ т.-е. } y^m \pm 1=0.$$

*) Когда двучленное уравненіе имѣетъ видъ $ax^m+bx^n=0$, гдѣ $m>n$, то его можно представить такъ: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и, слѣдов., оно распадается на два уравненія: $x=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

Найдя y, опредѣлимъ потомъ и x изъ равенства: $x=y\sqrt[m]{q}$.

Итакъ, рѣшеніе двучленныхъ уравненій приводится къ рѣшенію уравненій вида $y^m\pm1=0$. Рѣшеніе уравненій этого вида элементарными способами можетъ быть выполнено только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ. Общій пріемъ, употребляемый при этомъ, состоитъ въ разложеніи лѣвой части уравненія на множителей, послѣ чего уравненіе приводится къ виду $ABC...=0$, разсмотрѣнному нами раньше. Покажемъ, напр., какъ рѣшаются двучленныя уравненія третьей степени:

$$x^3-1=0 \text{ и } x^3+1=0$$

Замѣтивъ, что

$$x^3-1=x^3-x^2+x^2-1=x^2(x-1)+(x+1)(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+1=x^3+x^2-x^2+1=x^2(x+1)-(x^2-1)=(x+1)(x^2-x+1)$$

можемъ предложенныя уравненія написать такъ:

$$(x-1)\ (x^2+x+1)=0 \text{ и } (x+1)\ (x^2-x+1)=0.$$

Значитъ, первое изъ нихъ имѣетъ корни, удовлетворяющіе уравненіямъ:

$$x-1=0 \text{ и } x^2+x+1=0,$$

а корни второго должны удовлетворять уравненіямъ:

$$x+1=0 \text{ и } x^2-x+1=0.$$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ, что уравненіе $x^3-1=0$ имѣетъ слѣдующіе 3 корня:

$$x_1=1, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

изъ которыхъ одинъ вещественный, а два мнимыхъ; уравненіе $x^3+1=0$ имѣетъ три слѣдующіе корня:

$$x_1=-1, \quad x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

224. Вотъ еще нѣкоторые **примѣры двучленныхъ уравненій, разрѣшимыхъ элементарно:**

1) $x^4-1=0$; это уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2-1)(x^2+1)=0.$$

Слѣд., оно распадается на два: $x^2-1=0$ и $x^2+1=0$; отсюда находимъ $x=\pm1$ и $x=\pm\sqrt{-1}$.

2) $x^4+1=0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2+1)^2-2x^2=0, \text{ или: } (x^2+1-x\sqrt{2})\ (x^2+1+x\sqrt{2})=0$$

Слѣд., оно распадается на 2 уравненія второй степени.

3) $x^5-1=0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное уравненіе 4-й степени, рѣшаемое элементарно.

4) $x^5+1=0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное 4-й степени.

Подобнымъ же образомъ рѣшаются уравненія:

$$x^6\pm1=0;\ x^8\pm1=0;\ x^9\pm1=0$$

и нѣкоторыя другія. Общій пріемъ рѣшенія состоитъ въ томъ, что лѣвая часть уравненія разлагается на множителей, изъ которыхъ каждый, будучи приравненъ 0, представляетъ уравненіе, разрѣшимое элементарно.

225. Различныя значенія корня. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій имѣетъ тѣсную связь съ нахожденіемъ всѣхъ значеній корня изъ даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ x обозначимъ какое угодно значеніе $\sqrt[m]{A}$, то, согласно опредѣленію корня, мы будемъ имѣть $x^m=A$ и, слѣд. $x^m-A=0$; поэтому сколько это уравненіе имѣетъ различныхъ рѣшеній, столько $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ различныхъ значеній.

Основываясь на этомъ замѣчаніи. докажемъ, что *корень кубичный изъ всякаго числа имѣетъ три различныя значенія.* Пусть требуется найти всѣ значенія $\sqrt[3]{A}$, т.-е. рѣшить уравненіе $x^3-A=0$. Обозначивъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{A}$ черезъ q, введемъ вспомогательное неизвѣстное y, связанное съ x такимъ равенствомъ: $x=qy$. Тогда ур. $x^3-A=0$ представится такъ: $q^3y^3-A=0$; но $q^3=A$; поэтому $q^3y^3-A=A(y^3-1)$; слѣдов., уравненіе окончательно приметъ видъ: $y^3-1=0$. Мы видѣли, что это уравненіе имѣетъ три корня:

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad y_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Каждое изъ этихъ значеній, удовлетворяя уравненію $y^3=1$ представляетъ собою кубичный корень изъ 1. Такъ какъ $x=qy$, то:

$$x_1=q.1,\quad x_2=q.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad x_3=q.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Это и будутъ три значенія $\sqrt[3]{A}$; одно изъ нихъ вещественное, а два мнимыя. Всѣ они получатся, если *ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{A}$ умножимъ на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ* 1. Напр., кубичный корень изъ 8-ми, ариѳметическое значеніе котораго есть 2, имѣетъ слѣдующія три значенія:

$$2;\ 2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1+\sqrt{-3};\ 2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1-\sqrt{-3}$$

Въ высшей алгебрѣ доказывается, что уравненіе $x^m-A=0$ имѣетъ m *различныхъ* корней; вслѣдствіе этого $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній причемъ, если m число четное и A отрицательное, то всѣ эти значенія мнимыя; если m четное число и A положительное, то два значенія вещественныя (изъ нихъ одно положительное, другое отрицательное, съ одинаковой абсолютной величиной); наконецъ, если m нечетное число, изъ всѣхъ значеній $\sqrt[m]{A}$ только одно вещественное.

226. Трехчленное уравненіе. Такъ наз. уравненіе вида: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, т. е. уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, содержащее 3 члена: одинъ свободный (c), другой съ неизвѣстнымъ въ произвольной степени n и третій съ неизвѣстнымъ въ степени, которой показатель вдвое больше n. Такое уравненіе приводится къ квадратному, если положимъ, что $x^n=y$; тогда $x^{2n}=y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0;\ \text{откуда:}\ y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{и, слѣд.,}\ x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Рѣшивъ это двучленное уравненіе, найдемъ всѣ значенія x.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $x^6-9x^3+8=0$.

$$x^3=y;\ y^2-9y+8=0;\ y=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}=\frac{9\pm7}{2}$$

$$y_1=8,\ y_2=1,\ \text{слѣд.:}\ x^3=8\ \text{и}\ x^3=1$$

Рѣшивъ эти двучленныя уравненія, получимъ слѣдующія 6 значеній для x:

$$x_1=2;\ x_2=-1+\sqrt{-3};\ x_3=-1-\sqrt{-3}$$

$$x_4=1;\ x_5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\ x_6=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

227. Уравненія, сходныя съ трехчленными. Подобно трехчленнымъ рѣшаются также уравненія вида:

$$aQ^2+bQ+c=0 \text{ и } aQ^4+bQ^2+c=0,$$

если Q есть такое выраженіе, содержащее x, которое, будучи приравнено данному количеству, составитъ уравненіе, разрѣшимое элементарно. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $Q=y$, получимъ квадратное или биквадратное уравненіе относительно y. Найдя всѣ значенія y и подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. $Q=y$, найдемъ изъ этого уравненія всѣ значенія x.

Примѣръ: $(x^2-5x+11)^2-12(x^2-5x+11)+35=0$.

Положивъ: $x^2-5x+11=y$, получимъ: $y^2-12y+35=0$

откуда: $y_1=7$ $y_2=5$

слѣд.: $x^2-5x+11=7$ и $x^2-5x+11=5$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ: $x_1=4$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=2$.

228. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда уравненіе удается рѣшить посредствомъ введенія двухъ или болѣе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ; въ такомъ случаѣ данное уравненіе приводится къ системѣ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными.

Примѣръ: $(x+a)^4+(x+b)^4=c$.

Положимъ, что $x+a=y$, $x+b=z$; тогда рѣшеніе даннаго уравненія сводится къ рѣшенію такой системы:

$$y^4+z^4=c; \qquad y-z=a-b.$$

Чтобы рѣшить эту систему, возвысимъ второе уравненіе въ 4-ю степень и вычтемъ изъ него первое; тогда получимъ.

$$-4y^3z+6y^2z^2-4yz^3=(a-b)^4-c$$

или
$$2yz(2y^2-3yz+2z^2)=c-(a-b)^4$$

т.-е.
$$2yz[2(y-z)^2+yz]=c-(a-b)^4$$

Но $y-z=a-b$; подставивъ, найдемъ:

$$2yz[2(a-b)^2+yz)=c-(a-b)^4$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ yz; зная yz и $y-z$, легко затѣмъ найдемъ y и z.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторыя замѣчанія объ алгебраическихъ уравненіяхъ.

229. Общій видъ всякаго алгебраическаго уравненія. Мы видѣли (§ 94), что всякое уравненіе, содержащее неизвѣстное въ знаменателяхъ, можетъ быть приведено къ цѣлому виду. Далѣе мы знаемъ (§ 214), что уравненіе, содержащее неизвѣстное подъ знакомъ радикала, можетъ быть приведено къ раціональному виду. Вслѣдствіе этого можемъ утверждать, что всякое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное связано съ данными величинами

посредствомъ конечнаго числа 6-ти алгебраическихъ **дѣйствій** (**сложенія**, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня), можетъ быть приведено къ такому *цѣлому и раціональному виду*:

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+kx+l=0$$

a, b, c... k и l называются коэффиціентами уравненія, а m есть показатель его степени. Нѣкоторые коэффиціенты въ частныхъ случаяхъ могутъ равняться 0.

Уравненіе такого вида наз. *алгебраическимъ*. Алгебраическія уравненія степени выше 2-й наз. уравненіями *высшихъ степеней*.

229,a. **Нѣкоторыя свойства алгебраическаго уравненія**. Уравненія высшихъ степеней составляютъ предметъ *высшей алгебры*; элементарная же разсматриваетъ только нѣкоторые частные случаи этихъ уравненій.

Высшая алгебра устанавливаетъ слѣдующую важную истину объ уравненіяхъ: *всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ вещественный или мнимый корень* (теорема **Коши**). Допустивъ эту истину (доказательство которой въ элементарной алгебрѣ было бы затруднительно), не трудно показать, что *алгебраическое уравненіе имѣетъ столько корней, вещественныхъ или мнимыхъ, сколько единицъ въ показателѣ его степени*. Дѣйствительно, пусть имѣемъ уравненіе:

$$ax^m+bx^{m+1}+cx^{m-2}+\ldots+kx+l=0 \qquad [1]$$

По указанному выше свойству это уравненіе должно имѣть вещественный или мнимый корень; пусть этотъ корень будетъ α. Тогда многочленъ, стоящій въ лѣвой части уравненія [1], долженъ дѣлиться на $x-\alpha$ (§ 58, слѣдствіе). Если сдѣлаемъ дѣленіе, то въ частномъ получимъ многочленъ степени $m-1$, у котораго первый коэффиціентъ будетъ a. Обозначивъ другіе его коэффиціенты соотвѣтственно буквами: b_1, c_1,...k_1 и принимая во вниманіе, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, можемъ представить уравненіе [1] такъ:

$$(x-\alpha)(ax^{m-1}+b_1x^{m-2}+c_1x^{m-3}+\ldots+k_1)=0 \qquad [2]$$

Приравнявъ 0 многочленъ, стоящій во вторыхъ скобкахъ, получимъ новое уравненіе, которое, по тому же свойству, должно имѣть нѣкоторый корень β; вслѣдствіе этого лѣвая его часть можетъ быть разложена на два множителя: $x-\beta$ и многочленъ степени $m-2$, у котораго первый коэффиціентъ попрежнему будетъ a. Поэтому уравненіе [1] можно переписать такъ:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(ax^{m-2}+b_{11}x^{m-3}+\ldots)=0 \qquad [3]$$

Продолжая эти разсужденія далѣе, дойдемъ, наконецъ, до того, что многочленъ, заключенный въ послѣднихъ скобкахъ, будетъ 2-й степени, причемъ первый его коэффиціентъ останется a. Разложивъ этотъ многочленъ **на множителей** (§ 198), приведемъ уравненіе [1] окончательно къ виду:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0 \qquad [4]$$

гдѣ всѣхъ разностей: $x-\alpha$, $x-\beta$... будетъ m. Очевидно, что ур. [4] обращается въ тождество при каждомъ изъ значенiй $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$,...$x=\lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значенiями x; значитъ, уравненiе [1] имѣетъ m корней; α, β, γ,... λ. Въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые или всѣ корни могутъ оказаться одинаковыми.

Полезно замѣтить еще слѣдующiя истины, доказываемыя въ высшей алгебрѣ:

Если алгебраическое уравненiе съ вещественными коэффицiентами имѣетъ мнимые корни, то число этихъ корней четное (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненiе).

Если алгебраическое уравненiе съ вещественными коэффицiентами имѣетъ n корней вида $p+qi$, то оно имѣетъ n корней вида $p-qi$ (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненiе, мнимые корни котораго всегда сопряженные), и такъ какъ: $[x-(p+qi)]\ [x-(p-qi)]=[(x-p)-qi]\ [(x-p)+qi]=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2)$, то лѣвая часть уравненiя содержитъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ множителей вида ax^2+bx+c.

Алгебраическое уравненiе нечетной степени съ вещественными коэффицiентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень.

Уравненiя съ произвольными буквенными коэффицiентами степени 3-й и 4-й разрѣшены *алгебраически*, т.-е. для корней этихъ уравненiй найдены общiя формулы, составленныя изъ коэффицiентовъ уравненiя посредствомъ алгебраическихъ дѣйствiй.

Въ этомъ смыслѣ уравненiя съ произвольными буквенными коэффицiентами степени выше 4-й не могутъ быть разрѣшены алгебраически (теорема Абеля); однако, когда коэффицiенты уравненiя какой угодно степени выражены *числами*, всегда есть возможность вычислить съ желаемой степенью приближенiя всѣ его корни, какъ вещественные, такъ и мнимые. Указанiе способовъ такого вычисленiя составляетъ важную часть предмета высшей алгебры.

ГЛАВА VIII.

Система уравненiй второй степени.

230. Общiй видъ уравненiя второй степени съ двумя неизвѣстными x и y послѣ упрощенiя его есть слѣдующiй:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

гдѣ коэффицiенты a, b, c, d, e и f суть данныя числа, положительныя или отрицательныя; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ равняться 0.

Одно уравненiе съ двумя неизвѣстными допускаетъ без-

численное множество рѣшеній, т.-е. принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ (см. § 97).

231. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, а другое второй степени. Пусть имѣемъ систему:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ mx+ny=p \end{cases}$$

Чтобы рѣшить ее, опредѣлимъ изъ уравненія первой степени одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., y въ зависимости отъ x, и вставимъ полученное выраженіе въ уравненіе второй степени:

$$y=\frac{p-mx}{n}$$

$$ax^2+bx\left(\frac{p-mx}{n}\right)+c\left(\frac{p-mx}{n}\right)^2+dx+e\left(\frac{p-mx}{n}\right)+f=0.$$

Послѣднее уравненіе есть квадратное съ однимъ неизвѣстнымъ x. Рѣшивъ его, найдемъ для x два значенія: x_1 и x_{11}, соотвѣтственно которымъ получимъ и два значенія для другого неизвѣстнаго: y_1 и y_{11}. Такимъ образомъ, предложенная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній: (x_1, y_1) и (x_{11}, y_{11}).

232. Искусственные пріемы. Указанный пріемъ примѣнимъ всегда, коль скоро одно уравненіе первой степени, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе пользоваться искусственными пріемами, для которыхъ нельзя указать общаго правила. Приведемъ нѣкоторые примѣры:

Примѣръ 1. $x+y=a;\ xy=b.$

Первый способъ. Такъ какъ предложенныя уравненія даютъ *сумму* и *произведеніе* неизвѣстныхъ, то x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія (§ 197):

$$z^2-az+b=0$$

слѣд.: $$x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b};\quad y=z_{11}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтемъ изъ него учетверенное второе *):

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2=a^2 \\ -4xy=-4b \\ \hline x^2-2xy+y^2=a^2-4b \end{array}$$

т.-е. $(x-y)^2=a^2-4b$; откуда: $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$.

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b} \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, получимъ:

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b} \qquad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b}$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

гдѣ знаки $\pm$ и $\mp$ находятся *въ соотвѣтствіи* другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ формулѣ для x соотвѣтствуетъ верхній знакъ въ формулѣ для y, а нижнему знаку въ первой формулѣ соотвѣтствуетъ нижній знакъ второй формулы.

Такимъ образомъ, данная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_{11}=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_{11}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

Вторая пара отличается отъ первой только тѣмъ, что значеніе x первой пары служитъ значеніемъ y второй пары, и наоборотъ. Это можно было бы предвидѣть a priori, такъ какъ данныя уравненія таковы, что они не измѣняются отъ замѣны x на y, а y на x. Замѣтимъ, что такія уравненія наз. *симметричными*.

Примѣръ 2. $x-y=a, \qquad xy=b.$

Первый способъ. Представивъ уравненія въ видѣ:

$$x+(-y)=a \qquad x(-y)=-b$$

---

*) Подобныя фразы употребляются часто, ради краткости, вмѣсто „возвысимъ *обѣ части* уравненія въ квадратъ“, „умножимъ *обѣ части* уравненія на 4“ и т. п.

замѣчаемъ, что x и $-y$ суть корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2-az-b=0$$

слѣд., $x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$; $y=-z_{11}=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)$

Второй способъ. Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и сложивъ его съ учетвереннымъ вторымъ, получимъ:

$$(x+y)^2=a^2+4b;\ \text{откуда:}\ x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}$$

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b} \\ x-y=a \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, найдемъ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

гдѣ знаки $\pm$ въ обѣихъ формулахъ находятся *въ соотвѣтствіи.*

Примѣръ 3. $x+y=a$, $x^2+y^2=b$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе, получимъ:

$$2xy=a^2-b,\ \text{откуда:}\ xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Теперь вопросъ приводится къ рѣшенію системы:

$$x+y=a,\ xy=\frac{a^2-b}{2},$$

которую мы уже разсмотрѣли въ примѣрѣ первомъ.

233. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ каждое второй степени. Такая система въ общемъ видѣ не разрѣшается элементарно, такъ какъ она приводится къ полному уравненію 4-й степени.

Въ самомъ дѣлѣ, въ общемъ видѣ эта система представляется такъ:

$$\begin{cases} a\,x^2+b\,xy+c\,y^2+d\,x+e\,y+f=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \end{cases}$$

Чтобы исключить одно неизвѣстное, достаточно было бы изъ какого-либо уравненія опредѣлить одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и вставить полученное выраженіе во второе уравненіе; но тогда пришлось бы освобождать уравненіе отъ знаковъ радикала. Можно поступить проще:

умножимъ первое уравненіе на c', а второе на c, и вычтемъ почленно одно изъ другого; точка исключится y^2, и уравненіе приметъ видъ:

$$mx^2+nxy+px+qy+r=0$$

или

$$mx^2+(nx+q)y+px+r=0$$

Откуда

$$y=-\frac{mx^2+px+r}{nx+q}$$

Вставивъ это значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій и освободивъ полученное уравненіе отъ знаменателей, будемъ имѣть въ окончательномъ результатѣ полное уравненіе 4-й степени, которое въ общемъ видѣ элементарными способами не разрѣшается.

Разсмотримъ **нѣкоторые частные случаи,** которые можно рѣшить элементарнымъ путемъ.

Примѣръ 1. $x^2+y^2=a$, $xy=b$.

Первый способъ (подстановки). Изъ второго уравненія опредѣляемъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., $x=\frac{b}{y}$. Вставимъ это значеніе въ первое уравненіе и освободимся отъ знаменателя; тогда получимъ биквадратное уравненіе: $y^4-ay^2+b^2=0$. Рѣшивъ его, найдемъ для y четыре значенія. Вставивъ каждое изъ нихъ въ формулу, выведенную ранѣе для x, найдемъ четыре соотвѣтствующія значенія для x.

Второй способъ. Сложивъ первое уравненіе съ удвоеннымъ вторымъ, получимъ:

$$x^2+y^2+2xy=a+2b, \text{ т.-е. } (x+y)^2=a+2b$$

Откуда: $$x+y=\pm\sqrt{a+2b} \qquad [1]$$

Вычтя изъ перваго уравненія удвоенное второе, найдемъ:

$$x^2+y^2-2xy=a-2b, \text{ т.-е. } (x-y)^2=a-2b$$

Откуда: $$x-y=\pm\sqrt{a-2b} \qquad [2]$$

Не трудно видѣть, что знаки $\pm$ въ уравненіяхъ [1] и [2] не находятся въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, и потому вопросъ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ 4-хъ системъ первой степени:

$$1)\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

Каждая изъ нихъ рѣшается весьма просто посредствомъ сложенія и вычитанія уравненій.

Третій способъ. Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, получимъ слѣдующую систему:

$$x^2+y^2=a,\quad x^2y^2=b^2$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 суть и корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2-az+b^2=0$$

Слѣд.: $x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},\ y^2=z_{11}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$

и $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}$

гдѣ знаки $\pm$ въ обѣихъ формулахъ не находятся въ соотвѣтствіи.

Примѣръ 2. $x^2-y^2=a,\ xy=b.$

Способомъ постановки легко приведемъ эту систему къ биквадратному уравненію. Вотъ еще искусственное рѣшеніе: Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, будемъ имѣть систему:

$$x^2-y^2=a,\quad x^2y^2=b^2$$

или: $$x^2+(-y^2)=a,\quad x^2(-y^2)=-b^2$$

Отсюда видно, что x^2 и $-y^2$ суть корни такого уравненія:

$$z^2-az-b^2=0$$

Слѣд.: $x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2},\ y^2=-z_{11}=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}\right)$

Отсюда найдемъ x и y.

Примѣръ 3. $\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\\ a'x^2+b'xy+c'y=0\end{cases}$

Раздѣливъ второе уравненіе на y^2, получимъ:

$$a'\left(\frac{x}{y}\right)^2+b'\left(\frac{x}{y}\right)+c'=0$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе относительно $\frac{x}{y}$, найдемъ два значенія: $\frac{x}{y}=m$ и $\frac{x}{y}=n$; откуда: $x=my$ и $x=ny$.

Подставивъ въ первое данное уравненіе на мѣсто x эти величины, получимъ квадратное уравненіе относительно y.

234. Системы трехъ и болѣе уравненій второй степени, а также системы уравненій высшихъ степеней могутъ быть рѣшены элементарными способами только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ посредствомъ искусственныхъ пріемовъ.

Примѣръ 1.

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$$

Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ:

$$(x+y+z)^2=a+b+c$$

Откуда: $$x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$$

Послѣ этого изъ данныхъ уравненій находимъ:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}},\quad y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}},\quad z=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

Примѣръ 2.

$$yz=a,\quad xz=b,\quad xy=c$$

Перемноживъ всѣ уравненія почленно, получимъ: $x^2y^2z^2=abc$, т.-е. $(xyz)^2=abc$, откуда: $xyz=\pm\sqrt{abc}$. Раздѣливъ это уравненіе почленно на данныя, найдемъ:

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a},\quad y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b},\quad z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

ОТДѢЛЪ VI.

Неравенства и неопредѣленныя уравненія.

ГЛАВА I.

Неравенства.

235. Сравненіе чиселъ по величинѣ. Понятіе о томъ, какое изъ двухъ чиселъ больше или меньше, въ примѣненіи къ такимъ символамъ, какъ отрицательныя числа, можетъ имѣть лишь условный смыслъ. Оно выражается въ слѣдующемъ опредѣленіи:

Опредѣленіе. *Каковы бы ни были знаки чиселъ* a *и* b, a *считается большимъ* b, *когда разность* a—b *есть положительное число,* a *считается меньшимъ* b, *когда разность* a—b *есть отрицательное число, и* a *считается равнымъ* b, *когда разность между ними равна нулю.*

Изъ этого опредѣленія, не противорѣчащаго нашему понятію о большемъ и меньшемъ въ примѣненіи къ обыкновеннымъ ариѳметическимъ числамъ, можно вывести слѣдующія **слѣдствія:**

1) *Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго,* потому что разность между первымъ и вторымъ всегда положительна; такъ, $+3>-2$, потому что разность $3-(-2)$, равная $3+2$, есть число положительное.

2) *Всякое положительное число больше нуля* по той же причинѣ.

3) *Всякое отрицательное число меньше нуля,* потому что разность между первымъ и вторымъ всегда отрицательна.

Основываясь на слѣдствіяхъ 2-мъ и 3-мъ, когда желаютъ выразить, что число a положительное, обыкновенно пишутъ такъ: $a>0$; если же желаютъ выразить, что a отрицательное число, то пишутъ: $a<0$.

4) *Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше;* напр., -7 больше -9, такъ какъ разность $(-7)-(-9)$, равная $9-7$, есть число положительное.

5) *Если* $A>B$, *то* $B<A$, такъ какъ если разность $A-B$ положительна, то разность $B-A$ отрицательна.

6) *Если* $A>B$ *и* $B>C$, *то* $A>C$, такъ какъ если разности $A-B$ и $B-C$ положительны, и сумма этихъ разностей положительна, а эта сумма равна $A-C$.

236. Неравенства и ихъ подраздѣленія. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знаками $>$ или $<$, составляютъ *неравенство*.

Неравенство состоитъ изъ двухъ *частей:* лѣвой и правой.

Подобно равенствамъ, неравенства бываютъ двоякаго рода: 1) *неравенства тождественныя*, вѣрныя при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, и 2) *неравенства, соотвѣтствующія уравненіямъ*, вѣрныя только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ (эти буквы наз. тогда *неизвѣстными* неравенства; онѣ обыкновенно берутся изъ послѣднихъ буквъ алфавита). Напр., неравенство:

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

выражающее, что среднее ариѳметическое двухъ положительныхъ чиселъ больше ихъ средняго геометрическаго, вѣрно при всякихъ положительныхъ значеніяхъ буквъ a и b, не равныхъ другъ другу *); тогда какъ неравенство:

$$3x+2<x+10$$

вѣрно не при всякихъ значеніяхъ x, а только для такихъ, которыя меньше 4.

Неравенства второго рода, подобно уравненіямъ, раздѣляются по числу неизвѣстныхъ и по степенямъ ихъ.

---

*) Доказательство этого приведено ниже въ § 244, примѣръ 1.

Два неравенства, удовлетворяющіяся одними и тѣми же значеніями буквъ, наз. *равносильными* *).

237. Два рода вопросовъ относительно неравенствъ. Относительно неравенствъ (какъ и равенствъ) могутъ быть предлагаемы вопросы двоякаго рода:

1) *доказать тождественное неравенство*, т.-е. обнаружить его вѣрность при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, или ограниченныхъ заданными напередъ условіями;

2) *рѣшить неравенство*, т.-е. опредѣлить, между какими предѣлами должны заключаться численныя значенія неизвѣстныхъ, входящихъ въ неравенство, чтобы оно было вѣрно, т.-е. больше чего, или меньше чего должны быть эти значенія неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе вопросовъ того и другого рода основывается на нѣкоторыхъ теоремахъ подобныхъ тѣмъ, которыя служатъ основаніемъ для рѣшенія уравненій.

238. Теорема 1. *Если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ (или отъ нихъ вычтемъ) одно и то же число или алгебраическое выраженіе, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.*

Обозначимъ черезъ m какое угодно число или алгебраическое выраженіе и докажемъ, что два неравенства:

$$A>B \quad [1] \qquad \text{и} \qquad A+m>B+m \quad [2]$$

равносильны. Положимъ, что первое неравенство удовлетворяется при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ разность $A-B$ положительное число; но тогда, при тѣхъ же значеніяхъ буквъ, и разность $(A+m)-(B+m)$ положительное число, такъ какъ эта разность (по сокращеніи $+m$ и $-m$) тождественно равна $A-B$. Обратно, если для нѣкоторыхъ значеній буквъ, разность $(A+m)-(B+m)$ положительна, то для тѣхъ же значеній буквъ и разность $A-B$ положительна. Изъ этого слѣдуетъ, что разсматриваемыя два неравенства равносильны.

---

*) Также *тождественными, эквивалентными, однозначащими.*

Слѣдствіе. *Члены неравенства можно переносить изъ одной части въ другую съ обратными знаками.* Если, напр., имѣемъ:

$$A > B + C$$

то, отнявъ отъ обѣихъ частей по C, получимъ: $A - C > B$.

Замѣчаніе. Истина, изложенная въ этомъ §, не теряетъ своей силы и тогда, когда *къ обѣимъ частямъ неравенства прибавляется алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя.* Но. чтобы устранить всякія недоразумѣнія, должно разсмотрѣть особо тотъ случай, когда какія-нибудь значенія буквъ, удовлетворяющія неравенству $A > B$, обращаютъ въ ∞ выраженіе, прибавляемое къ обѣимъ частямъ неравенства. Пусть, напр., къ частямъ неравенства: $2x + 1 > 3$ мы приложили по $\frac{1}{2-x}$:

$$2x + 1 > 3 \qquad [1] \qquad\qquad 2x + 1 + \frac{1}{2-x} > 3 + \frac{1}{2-x} \qquad [2]$$

Неравенство [1] удовлетворяется, между прочимъ, при $x = 2$; это значеніе x обращаетъ выраженіе $\frac{1}{2-x}$ въ ∞, и неравенство [2] при $x = 2$ принимаетъ видъ: $\infty > \infty$. Возникаетъ вопросъ, можно ли утверждать, что значеніе $x = 2$ удовлетворяетъ неравенству [2]? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, надо условиться, въ какомъ смыслѣ понимать неравенство $\infty > \infty$. Это неравенство принимаютъ за тождество лишь въ томъ случаѣ, *когда, по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличенія обѣихъ частей неравенства, разность между лѣвой и правой его частями имѣетъ предѣломъ положительное число* (ср. § 91). Если такъ, то можемъ утверждать, что неравенство [2] удовлетворяется и при $x = 2$, такъ какъ по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличенія его частей (что будетъ при неограниченномъ приближеніи x къ 2) разность между его лѣвою и правою частями, равная $2x - 2$, стремится къ положительному числу .

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что неравенства:

$$A > B \text{ и } A + m > B + m$$

равносильны во всѣхъ случаяхъ безъ исключенія.

239. Теорема 2. *Если обѣ части неравенства умножимъ (или раздѣлимъ) на одно и то же положительное число, не равное* 0, *то получимъ новое неравенство, равносильное первому.*

Докажемъ, что два неравенства:

$$A > B \qquad [1] \qquad \text{и} \qquad Am > Bm \qquad [2]$$

равносильны, если только m положительное число, не равное 0.

Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ разность $A-B$ положительное число; тогда, при тѣхъ же значеніяхъ буквъ, и разность $Am-Bm$ будетъ тоже положительное число, такъ какъ эта разность равна $m(A-B)$, т.-е. представляетъ произведеніе двухъ положительныхъ множителей: m и $A-B$. Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ разность $Am-Bm$, равная $m(A-B)$, есть положительное число, то при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и разность $A-B$ должна быть положительное число (такъ какъ множитель m положителенъ). Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что разсматриваемыя неравенства равносильны.

Слѣдствіе. Если обѣ части неравенства содержатъ *положительнаго* общаго множителя, то на него можно сократить неравенство. Напр., въ обѣихъ частяхъ неравенства:

$$(x-5)^2(x-1)>(x-5)^2(3-x)$$

есть общій множитель $(x-5)^2$. Этотъ множитель при $x=5$ обращается въ 0, а при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ есть число *положительное*. Рѣшеніе $x=5$ не удовлетворяетъ данному неравенству. Желая рѣшить, удовлетворяется ли оно *при другихъ значеніяхъ* x, мы можемъ сократить обѣ части неравенства на $(x-5)^2$, какъ на число положительное; послѣ сокращенія получимъ неравенство:

$$x-1>3-x$$

Всѣ значенія x, удовлетворяющія этому неравенству, *за исключеніемъ* $x=5$, удовлетворяютъ и данному неравенству.

240. Теорема 3. *Если обѣ части неравенства умножимъ (или раздѣлимъ) на одно и то же отрицательное число и при этомъ перемѣнимъ знакъ неравенства на обратный, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.*

Требуется доказать, что неравенства:

$$A>B \quad [1] \qquad \text{и} \qquad Am<Bm \quad [2]$$

равносильны, если только m есть отрицательное число. Дѣйствительно, разность $Am-Bm$, равная $m(A-B)$, можетъ быть отрицательна, при m отрицательномъ, *только* при такихъ значеніяхъ буквъ, при которыхъ $A-B$ положительное

число. Значитъ, неравенства [1] и [2] удовлетворяются одними и тѣми же значеніями буквъ, т.-е. они равносильны.

Слѣдствія. 1) Перемѣнивъ у всѣхъ членовъ неравенства знаки на обратные (т.-е. умноживъ обѣ его части на —1), мы должны измѣнить знакъ неравенства на обратный.

2) Нельзя умножать обѣ части неравенства на буквеннаго множителя, знакъ котораго неизвѣстенъ.

3) Неравенство съ дробными членами можно привести къ цѣлому виду. Пусть, напр., имѣемъ:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \qquad [1]$$

Перенесемъ всѣ члены въ лѣвую часть и приведемъ ихъ къ общему знаменателю; тогда получимъ:

$$\frac{AD-BC}{BD} > 0. \qquad [2]$$

Если BD положительное число, то мы можемъ его отбросить, не измѣняя знака неравенства, потому что отбросить BD все равно, что умножить на это количество обѣ части неравенства; тогда получимъ:

$$AD-BC>0$$

Если BD отрицательное число, то мы можемъ его отбросить, перемѣнивъ знакъ неравенства на обратный; тогда получимъ:

$$AD-BC<0$$

Но когда знакъ BD неизвѣстенъ (что бываетъ вообще тогда, когда B и D содержатъ неизвѣстныя), мы не можемъ умножать обѣ части неравенства на BD. Тогда разсуждаемъ такъ: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нея числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Слѣд., неравенство [2] удовлетворится при такихъ значеніяхъ буквъ, при которыхъ

$$\begin{cases} AD-BC>0 \\ BD>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} AD-BC<0 \\ BD<0. \end{cases}$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе неравенства [1] сводится къ рѣшенію системъ неравенствъ, не содержащихъ знаменателей.

241. Теорема 4. *Если сложимъ почленно два неравенства одинаковаго смысла, то получимъ новое неравенство, удовлетворяющееся всѣми значеніями буквъ, способными удовлетворить двумъ первымъ неравенствамъ одновременно.*

О двухъ неравенствахъ говорятъ, что они одинаковаго смысла, если одновременно въ обоихъ лѣвыя части или больше, или меньше правыхъ; въ противномъ случаѣ говорятъ, что неравенства противоположнаго смысла.

Требуется доказать, что значенія буквъ, удовлетворяющія одновременно двумъ неравенствамъ:

$$A>B \text{ и } A_1>B_1$$

удовлетворяютъ также и слѣдующему неравенству:

$$A+A_1>B+B_1$$

Дѣйствительно, при такихъ значеніяхъ буквъ обѣ разности: $A-B$ и A_1-B_1 должны быть положительны; слѣд., должна быть положительна и сумма этихъ разностей, т.-е. $(A-B)+(A_1-B_1)$; но эта сумма равна $(A+A_1)-(B+B_1)$; слѣд.: $A+A_1>B+B_1$.

242. Теорема 5. *Если вычтемъ почленно два неравенства противоположнаго смысла, оставивъ знакъ того неравенства, котораго части были приняты за уменьшаемое, то получимъ новое неравенство, удовлетворяющееся всѣми значеніями буквъ, способными удовлетворить двумъ первымъ неравенствамъ одновременно.*

Требуется доказать, что значенія буквъ, удовлетворяющія одновременно двумъ неравенствамъ противоположнаго смысла:

$$A>B \text{ и } A_1<B_1$$

удовлетворяютъ также и слѣдующему неравенству:

$$A-A_1>B-B_1$$

Дѣйствительно, при такихъ значеніяхъ буквъ обѣ разности $A-B$ и B_1-A_1 должны быть положительны; слѣд., и сумма этихъ разностей должна быть положительна; но эта сумма равна $(A-A_1)-(B-B_1)$; значитъ, $A-A_1>B-B_1$.

243. О неравенствахъ, у которыхъ части суть числа *положительныя*, можно высказать еще слѣдующія, почти очевидныя, истины:

1) *Если* $A>B$ и $C\geqslant D$, *то* $AC>BD$;

2) *Если* $A>B$, *то* $A^2>B^2$; $A^3>B^3$ *и т. д.*

3) *Если* $A>B$, *то* $\sqrt{A}>\sqrt{B}$, $\sqrt[3]{A}>\sqrt[3]{B}$, *и т. д.* (гдѣ разсматривается только ариѳметическое значеніе корня).

4) *Если* $A>B$ и $C\leqslant D$, *то* $\frac{A}{C}>\frac{B}{D}$.

244. Доказательство неравенства. Нельзя установить какихъ-либо общихъ правилъ для обнаруженія вѣрности предложеннаго неравенства. Замѣтимъ

только, что для этой цѣли или преобразовываютъ неравенство такъ, чтобы оно сдѣлалось очевиднымъ, или же, наоборотъ, исходя изъ какого-либо очевиднаго неравенства, путемъ логическихъ разсужденій доходятъ до предложеннаго. Приведемъ нѣкоторые примѣры:

I. Доказать, что среднее ариѳметическое двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ больше ихъ средняго геометрическаго, т.-е., что $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

Предположимъ, что данное неравенство вѣрно. Въ такомъ случаѣ будутъ вѣрны и слѣдующія неравенства:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4}>ab;\ a^2+2ab+b^2>4ab;$$

$$a^2-2ab+b^2>0;\ (a-b)^2>0.$$

Такъ какъ $(a-b)^2$, при всякихъ значеніяхъ a и b, не равныхъ другъ другу, есть число положительное, то послѣднее неравенство безспорно. Переходя отъ него послѣдовательно къ предыдущимъ, убѣдимся, что и предложенное неравенство вѣрно *).

II. Доказать, что величина дроби:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$$

заключается между большею и меньшею изъ дробей:

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \ldots\ \frac{a_n}{b_n},$$

если $a_1,\ a_2,\ldots\ a_n,\ldots\ b_1,\ b_2,\ldots\ b_n$ *положительныя числа.*

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будетъ дробь, которая не больше никакой изъ остальныхъ дробей, и $\frac{a_n}{b_n}$ будетъ дробь, которая не меньше никакой изъ остальныхъ дробей. Положимъ, что $\frac{a_1}{b_1}=q_1$ и $\frac{a_n}{b_n}=q_n$. Тогда согласно предположенію:

$$\frac{a_1}{b_1}=q_1,\ \frac{a_2}{b_2}\geqq q_1,\ \frac{a_3}{b_3}\geqq q_1;\ \ldots\frac{a_n}{b_n}\geqq q_1.$$

$$\frac{a_n}{b_n}=q_n,\ \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqq q_n\ \ldots\ \frac{a_2}{b_2}\leqq q_n,\ \frac{a_1}{b_1}\leqq q_n.$$

---

*) Полезно замѣтить, что неравенство это становится нагляднымъ, если придадимъ ему *геометрическій* смыслъ. На произвольной прямой отложимъ отрѣзокъ AB, содержащій a линейныхъ единицъ, и въ томъ же направленіи отрѣзокъ BC, содержащій b такихъ же линейныхъ единицъ. На отрѣзкѣ AC, равномъ $a+b$, построимъ, какъ на діаметрѣ, полуокружность и изъ B возставимъ къ AC перпендикуляръ BD до пересѣченія съ полуокружностью. Тогда, какъ извѣстно изъ геометріи, BD есть средняя геометрическая AB и BC, т.-е. $BD=\sqrt{ab}$; средняя ариѳметическая AB и BC равна, очевидно, радіусу. Такъ какъ хорда меньше діаметра, то BD меньше радіуса, если только BD не совпадаетъ съ радіусомъ, т.-е. если $a\neq b$.

Отсюда: $a_1=b_1q_1$, $a_2\geqslant b_2q_1$, $a_3\geqslant b_3q_1\ldots a_n\geqslant b_nq_1$
и $a_n=b_nq_n$, $a_{n-1}\leqslant b_{n-1}q_n\ \ldots\ a_2\leqslant b_2q_n$, $a_1\leqslant b_1q_n$.

Сложивъ почленно неравенства 1-й строки между собою и неравенства 2-й строки между собою, получимъ:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n\geqslant(b_1+b_2+b_3\ldots.+b_n)q_1$$

и

$$a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n\leqslant(b_1+b_2+b_3\ldots.+b_n)q_n$$

Откуда, раздѣливъ обѣ части неравенствъ на положительное число $b_1+b_2+b_3\ldots+b_n$, окончательно найдемъ;

$$q_n\geqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n}\geqslant q_1,$$

что и требовалось доказать.

245. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, послѣ раскрытія въ немъ скобокъ и освобожденія отъ дробныхъ членовъ, есть слѣдующій:

$$ax+b>a_1x+b_1$$

Перенеся неизвѣстные члены въ лѣвую часть, а извѣстные въ правую, получимъ:

$$(a-a_1)x>b_1-b$$

Когда $a-a_1>0$, то, раздѣливъ на $a-a_1$ обѣ части неравенства, найдемъ:

$$x>\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

Если же $a-a_1<0$, то получимъ:

$$x<\frac{b_1-b}{a-a_1}.$$

Такимъ образомъ, одно неравенство первой степени даетъ для неизвѣстнаго одинъ *предѣлъ* *), ограничивающій значеніе неизвѣстнаго или сверху ($x<m$), или снизу ($x>m$). Поэтому вопросы, рѣшеніе которыхъ приводится къ рѣшенію

*) Здѣсь слово „предѣлъ" не имѣетъ того значенія, которое придается ему, когда говорятъ о „предѣлѣ" перемѣннаго числа; здѣсь, какъ и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ (напр., въ выраженіи „предѣлъ погрѣшности") слово „предѣлъ" означаетъ число, больше котораго или меньше котораго разсматриваемая величина не можетъ быть.

одного неравенства первой степени, принадлежатъ къ вопросамъ *неопредѣленнымъ*.

Примѣръ *Рѣшить неравенство* $2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$.

Раскрываемъ скобки: $4x^2-10x-27<4x^2+4x+1$.

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе: $-14x<28$.

Дѣлимъ обѣ части на -14: $x>-2$.

246. Два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Иногда случается, что вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ неравенствъ:

$$ax+b>a'x+b' \text{ и } cx+d>c'x+d'$$

Рѣшивъ эти неравенства, получимъ изъ каждаго по одному предѣлу для неизвѣстнаго. При этомъ могутъ представиться 3 случая:

1) *Предѣлы одинаковаго смысла;* тогда достаточно взять одинъ изъ нихъ. Если, напр., $x>7$ и $x>12$, то достаточно взять только $x>12$, потому что, если $x>12$, то, и подавно, $x>7$; или если, напр., $x<5$ и $x<8$, то достаточно положить, что $x<5$, потому что тогда, и подавно, $x<8$.

2) *Предѣлы противоположнаго смысла и не противорѣчатъ другъ другу;* напр.: $x>10$ и $x<15$. Въ этомъ случаѣ для неизвѣстнаго можно брать только такія значенія, которыя заключены между найденными предѣлами.

3) *Предѣлы противоположнаго смысла и противорѣчатъ другъ другу*; напр.: $x<5$ и $x>7$. Въ этомъ случаѣ неравенства, взятыя совмѣстно, невозможны.

Примѣръ. *Найти число, $\frac{3}{10}$ котораго, сложенныя съ 5, меньше половины искомаго числа, а 5 разъ взятое число меньше суммы 60-ти съ удвоеннымъ искомымъ числомъ.*

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ согласно условіямъ задачи:

$$\frac{3}{10}x+5<\frac{1}{2}x \text{ и } 5x<60+2x$$

Откуда: $x>25$ и $x<20$

Слѣд., задача невозможна.

246*a*. Рѣшеніе неравенства второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ такого неравенства, по упрощеніи его, есть слѣдующій:

$$ax^2+bx+c \gtrless 0$$

Такъ какъ знакъ $<$ всегда можетъ быть приведенъ къ знаку $>$ (умноженіемъ обѣихъ частей неравенства на -1), то достаточно разсмотрѣть неравенство вида:

$$ax^2+bx+c>0$$

въ которомъ число a можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ.

Рѣшеніе этого неравенства основано на свойствѣ трехчлена ax^2+bx+c разлагаться на множителей 1-й степени относительно x (§ 198). Обозначивъ черезъ α и β корни этого трехчлена, имѣемъ: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, и, слѣд., неравенство можно написать такъ:

$$a(x-\alpha)\ (x-\beta)>0$$

Разсмотримъ отдѣльно три случая:

I. Корни α и β вещественные неравные. Пусть $\alpha>\beta$. Если $a>0$, то произведеніе $a(x-\alpha)\ (x-\beta)$, очевидно, тогда положительно, когда каждая изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-\beta$ положительна или каждая отрицательна. Для этого достаточно, чтобы x было больше α (тогда подавно x больше β), или же чтобы x было меньше β (тогда подавно x меньше α). Слѣд., въ этомъ случаѣ неравенство получаетъ рѣшеніе:

$$x>\alpha \text{ или } x<\beta,$$

т.-е. x должно быть или больше большаго корня, или меньше меньшаго корня.

Если же $a<0$, то произведеніе $a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ тогда положительно, когда одна изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-\beta$ отрицательна, а другая положительна. Для этого достаточно, чтобы x удовлетворяло неравенствамъ:

$$x<\alpha \text{ и } x>\beta$$

т.-е. чтобы величина x заключалась между корнями трехчлена.

II. Корни α и β вещественные равные. Если $\alpha=\beta$, то неравенство принимаетъ видъ:

$$a(x-\alpha)^2>0$$

Такъ какъ при всякомъ вещественномъ значеніи x, не равномъ α, величина $(x-\alpha)^2$ положительна, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x, за исключеніемъ $x=\alpha$, а при $a<0$ это неравенство невозможно.

III. Корни α и β мнимыя количества. Пусть $\alpha=m+\sqrt{-n}$; въ такомъ случаѣ $\beta=m-\sqrt{-n}$.

Тогда: $x-\alpha=x-(m+\sqrt{-n})=(x-m)-\sqrt{-n}.$

и $x-\beta=x-(m-\sqrt{-n})=(x-m)+\sqrt{-n}.$

Слѣд.: $a(x-\alpha)\ (x-\beta)=a[(x-m)^2-(\sqrt{-n})^2]=a[(x-m)^2+n]$
и неравенство можно написать такъ:

$$a[(x-m)^2+n]>0.$$

Такъ какъ сумма $(x-m)^2+n$, при всякомъ вещественномъ значеніи x, есть число положительное, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всевозможными значеніями x, а при $a<0$ оно невозможно.

Примѣры: 1) *Рѣшить неравенство:* $x^2+3x-28>0$. Корни трехчлена: $\alpha=4$, $\beta=-7$. Слѣд., неравенство можно написать: $(x-4)\ [x-(-7)]>0$. Отсюда видно, что $x>4$, или $x<-7$.

2) *Рѣшить неравенство*: $4x^2-28x+49<0$. Корни суть: $\alpha=\beta=3^1/_2$. Поэтому:

$$4(x-3^1/_2)^2<0.$$

Откуда видно, что неравенство невозможно.

3) *Рѣшить неравенство*: $x^2-4x+7>0$. Корни суть: $\alpha=2+\sqrt{-3}$ $\beta=2-\sqrt{-3}$; поэтому неравенство можно написать такъ:

$$(x-2)^2+3>0$$

Отсюда видно, что оно удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x.

ГЛАВА II.

Рѣшеніе въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

Задачи. 1) Сколько нужно взять монетъ въ 2 коп. и въ 3 коп., чтобы составилась сумма 25 коп.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія $2x+3y=25$.

2) Въ обществѣ, состоящемъ изъ мужчинъ и женщинъ, былъ сдѣланъ въ складчину сборъ, причемъ каждый мужчина платилъ по 5 руб., а каждая женщина по 2 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если сборъ составилъ 100 руб.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія $5x+2y=100$.

247. Предварительное замѣчаніе. Какъ было прежде разъяснено (§ 97), одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и потому наз. *неопредѣленнымъ*. Но бываютъ вопросы, когда требуется найти не какія бы то ни было рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, а только *цѣлыя* и притомъ *положительныя*; при этомъ условіи можетъ случиться, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными окажется опредѣленнымъ (а иногда невозможнымъ). Разсмотримъ сначала, какъ можно находить цѣлыя рѣшенія, а потомъ цѣлыя и положительныя.

1. Нахожденіе цѣлыхъ рѣшеній.

248. Когда неопредѣленное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Всякое уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными, послѣ надлежащихъ преобразованій, можетъ быть приведено къ виду: $ax+by=c$, гдѣ a, b и c суть данныя *цѣлыя* числа, положительныя или отрицательныя. Мы предположимъ, что эти числа не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, кромѣ 1, потому что въ противномъ случаѣ мы могли бы сократить на него уравненіе. *Если при этомъ коэффиціенты* a *и* b *имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя, кромѣ 1, то уравненіе не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній.* Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что a и b имѣютъ общаго дѣлителя $m>1$, а c на него не дѣлится, то, при цѣлыхъ значеніяхъ x и y, лѣвая часть уравненія представляетъ число, дѣлящееся на m, а правая часть даетъ число, не дѣлящееся на m; значитъ, уравненіе невозможно при цѣлыхъ значеніяхъ x и y.

Напр., уравненіе $6x-21y=19$ не удовлетворяется никакими цѣлыми числами, такъ какъ при цѣлыхъ значеніяхъ x и y разность $6x-21y$ дѣлится на 3, тогда какъ 19 не дѣлится на 3.

Итакъ, разсмотримъ рѣшеніе уравненія $ax+by=c$ въ предположеніи, что числа a и b *взаимно простыя*.

249. Частный случай, когда a или b равно 1. Уравненіе $ax+by=c$ рѣшается весьма просто, если a или b равно 1.

Пусть, напр., $b=1$, д. е. уравненіе имѣетъ видъ:

$ax+y=c$; откуда $y=c-ax$

Изъ послѣдняго равенства видимъ, что, подставляя вмѣсто x какія угодно цѣлыя числа (положительныя или отрицательныя), будемъ получать и для y цѣлыя числа. Число этихъ рѣшеній, очевидно, безконечно; всѣ они заключены въ равенствѣ: $y=c-ax$, которое поэтому можно разсматривать, какъ *рѣшеніе* предложеннаго уравненія.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе*: $x-5y=17$.

Рѣшеніе: $x=5y+17$.

Подставляя вмѣсто y произвольныя цѣлыя числа: 0, 1, 2, 3... —1, —2, —3..., получимъ для x соотвѣтствующія значенія, выставленныя въ слѣдующей таблицѣ:

$y=$	0	1	2	3	4			—1	—2	—3	—4
$x=$	17	22	27	32	37			12	7	2	—3

250. Частный случай, когда $c=0$. Чтобы рѣшить уравненіе: $ax+by=0$, гдѣ a и b суть цѣлыя числа взаимно простыя, опредѣлимъ какое-нибудь одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго; напр.:

$$x=-\frac{by}{a}$$

Изъ этого равенства видно: чтобы x было цѣлое число, необходимо и достаточно, чтобы произведеніе by дѣлилось на a; но b и a суть числа взаимно простыя; поэтому для дѣлимости by на a необходимо и достаточно, чтобы y дѣлилось на a, т.-е., чтобы частное y/a было цѣлое число. Приравнявъ это частное произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$\frac{y}{a}=t,\ y=at \text{ и } x=-\frac{bat}{a}=-bt$$

Такъ какъ t означаетъ произвольно цѣлое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, то мы можемъ замѣ-

нить t на $-t$; тогда получимъ для неизвѣстныхъ другія формулы:

$$y=-at;\ x=bt$$

Такимъ образомъ, уравненіе $ax+by=0$ имѣетъ рѣшенія, выражаемыя формулами:

$$\text{или} \begin{cases} x=-bt \\ y=at \end{cases} \qquad \text{или} \begin{cases} x=bt \\ y=-at \end{cases}$$

Формулы эти можно высказать такъ: *каждое неизвѣстное уравненія* ax+by=0, *равно одному и тому же произвольному цѣлому числу, умноженному на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, причемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.*

Примѣры: 1) $17x+5y=0$; $x=-5t$, $y=17t$; или $x=5t$, $y=-17t$.
2) $9x-13y=0$; $x=13t$, $y=9t$; или $x=-13t$; $y=-9t$.

251. Общій случай. Когда ни одинъ изъ коэффиціентовъ a и b не равенъ 1, и c не равно 0, данное уравненіе, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, приводятъ къ другому уравненію, у котораго коэффиціенты меньше сравнительно съ первымъ; это уравненіе, въ свою очередь, приводятъ къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше и т. д., пока не получатъ уравненія, у котораго коэффиціентъ при какомъ-нибудь неизвѣстномъ равенъ 1. Такое уравненіе, какъ мы видѣли, рѣшается непосредственно.

Пусть имѣемъ уравненіе: $ax+by=c$ [1]. Чтобы привести его къ другому, у котораго коэффиціенты меньше, употребимъ послѣдовательно такіе **три пріема**:

1) *Опредѣлимъ изъ уравненія то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше*; пусть, напр., $b<a$; тогда опредѣлимъ y:

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

2) *Исключимъ изъ полученной неправильной дроби цѣлое число.* Пусть отъ дѣленія c на b частное и остатокъ соотвѣтственно будутъ c_1 и q, а отъ дѣленія a на b частное и остатокъ будутъ a_1 и r; тогда:

$$y=c_1-a_1x+\frac{q-rx}{b}.$$

Разсматривая это уравненіе, заключаемъ: если x и y числа цѣлыя, то и частное $\frac{q-rx}{b}$ также должно быть числомъ цѣлымъ; обратно, если частное $\frac{q-rx}{b}$ число цѣлое, при цѣломъ значеніи x, то и y будетъ цѣлымъ числомъ; значитъ, для того, чтобы x и y были числа цѣлыя, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе $\frac{q-rx}{b}$ было числомъ цѣлымъ при цѣломъ x.

Поэтому:

3) *приравниваемъ произвольному цѣлому числу t дробь, получившуюся послѣ исключенія цѣлаго числа:*

$$\frac{q-rx}{b}=t \quad [2]; \qquad \text{тогда:} \qquad y=c_1-a_1x+t \quad [A]$$

Если мы найдемъ цѣлыя значенія для x и t, удовлетворяющія ур. [2], то, подставивъ ихъ въ [A], найдемъ и для y соотвѣтствующее цѣлое число. Такимъ образомъ, рѣшеніе ур. [1] сводится къ рѣшенію ур. [2], которое можно написать такъ:

$$bt+rx=q$$

Коэффиціенты этого новаго уравненія меньше коэффиціентовъ даннаго уравненія, потому что *одинъ изъ нихъ равенъ меньшему коэффиціенту даннаго уравненія* (именно b), *а другой* (r) *равенъ остатку отъ дѣленія большаго коэффиціента даннаго уравненія на его меньшій коэффиціентъ.*

Тѣмъ же способомъ мы приведемъ уравненіе [2] къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше; это—къ четвертому, у котораго коэффиціенты еще меньше и т. д., пока, наконецъ, не получимъ уравненія, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ будетъ 1.

Примѣръ. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе:*

$$26x-7y=43$$

Прилагая къ этому уравненію указанные три пріема, находимъ:

$$y=\frac{26x-43}{7}=3x-6+\frac{5x-1}{7}.$$

$\frac{5x-1}{7}=t$ [2] $\qquad\qquad$ $y=3x-6+t$ $\qquad$ [A]

Изъ уравненія [2] опредѣляемъ x, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$x=\frac{1+7t}{5}=t+\frac{1+2t}{5}.$$

Приравниваемъ $\frac{1+2t}{5}$ произвольному цѣлому числу t_1:

$\frac{1+2t}{5}=t_1$ [3] $\qquad\qquad$ $x=t+t_1$ $\qquad$ [B]

Изъ уравненія [3] опредѣляемъ t, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$t=\frac{5t_1-1}{2}=2t_1+\frac{t_1-1}{2}.$$

Приравниваемъ $\frac{t_1-1}{2}$ произвольному цѣлому числу t_2:

$\frac{t_1-1}{2}=t_2$ [4] $\qquad\qquad$ $t=2t_1+t_2$ $\qquad$ [C]

Въ уравненіи [4], которое можно написать такъ: $t_1-1=$ $=2t_2$, коэффиціентъ при одномъ неизвѣстномъ равенъ 1, а потому оно рѣшается непосредственно:

$$t_1=1+2t_2 \qquad [D]$$

Здѣсь t_2 можетъ принимать произвольныя цѣлыя значенія. Положивъ, напр., $t_2=0$, найдемъ: $t_1=1$; подставивъ эти числа въ ур. [C], получимъ $t=2$; изъ ур. [B] находимъ: $x=3$, и, наконецъ, ур. [A] даетъ $y=5$. Назначивъ для t_2 какое-нибудь другое цѣлое число и переходя послѣдовательно черезъ уравненія [D], [C], [B] и [A], найдемъ соотвѣтствующія значенія x и y.

Впрочемъ, предпочитаютъ составлять формулы, выражающія x и y въ прямой зависимости отъ окончательнаго произвольнаго цѣлаго числа. Переходя послѣдовательно отъ ур.

$[D]$ къ $[C]$, отъ $[C]$ къ $[B]$ и отъ $[B]$ къ $[A]$, найдемъ посредствомъ подстановокъ:

$$t_1=1+2t_2;\ t=2(1+2t_2)+t_2=2+5t_2;$$
$$x=(2+5t_2)+(1+2t_2)=3+7t_2;$$
$$y=3(3+7t_2)-6+(2+5t_2)=5+26t_2;$$

Равенства: $x=3+7t_2$ и $y=5+26t_2$

представляютъ собою общее рѣшеніе даннаго уравненія, такъ какъ, подставляя вмѣсто t_2 произвольныя цѣлыя числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, будемъ получать всевозможныя цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію. Нѣкоторыя изъ этихъ значеній помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

t_2	0	1	2		-1	-2	-3
x	3	10	17		-4	-11	-18
y	5	31	57		-21	-47	-73

252. Когда неопредѣленное уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Разсмотрѣвъ описанный способъ рѣшенія, мы замѣчаемъ, что коэффиціенты послѣдовательныхъ уравненій находятся такъ: большій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на меньшій, и остатокъ принимается за меньшій коэффиціентъ второго уравненія; затѣмъ меньшій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на остатокъ, и остатокъ отъ этого дѣленія принимается за меньшій коэффиціентъ третьяго уравненія; далѣе, первый остатокъ дѣлится на второй, второй на третій и т. д., причемъ остатокъ отъ каждаго изъ этихъ дѣленій принимается за коэффиціентъ слѣдующаго уравненія. Изъ ариѳметики извѣстно, что такимъ способомъ послѣдовательнаго дѣленія находится общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ. Но такъ какъ коэффиціенты даннаго уравненія суть числа взаимно простыя, то ихъ общій наиб. дѣлитель есть 1; поэтому, дѣля большій коэф-

фиціентъ на меньшій, потомъ меньшій на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д., мы непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго 1, т.-е. получимъ уравненіе, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, а такъ какъ послѣднее уравненіе всегда рѣшается въ цѣлыхъ числахъ, то данное уравненіе въ этомъ случаѣ допускаетъ цѣлыя рѣшенія.

Принявъ во вниманіе сказанное раньше (§ 248), приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Для того, чтобы уравненіе ax+by=c, *гдѣ* a, b и c *суть цѣлыя числа, не имѣющія дѣлителя, общаго всѣмъ имъ, имѣло цѣлыя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты* a и b *были числа взаимно простыя.*

253. Нѣкоторыя упрощенія. I. *Если въ уравненіи* ax+by=c *числа* a *и* c, *или* b *и* c *имѣютъ общаго дѣлителя, то на него уравненіе можно сократить.*

Пусть, напр., a и c дѣлятся на нѣкоторое число p, такъ что $a=a'p$ и $c=c'p$. Раздѣливъ на p всѣ члены уравненія, получимъ:

$$a'x+\frac{by}{p}=c';$$

откуда видно, что частное $\frac{by}{p}$ должно быть числомъ цѣлымъ; но b и p суть числа взаимно простыя (въ противномъ случаѣ всѣ три числа: a, b и c имѣли бы общаго дѣлителя, большаго 1, и уравненіе могло бы быть сокращено); поэтому by раздѣлится на p только тогда, когда y раздѣлится на p. Положивъ $y=py'$, найдемъ:

$$\frac{by}{p}=by', \text{ и уравненіе будетъ } a'x+by'=c'.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ x и y'; умноживъ на p выраженіе, полученное для y', найдемъ y.

Примѣръ 1. *Рѣшить уравненіе* $12x-7y=15$.

Положивъ $y=3y'$ и сократив уравненіе на 3, получимъ:

$$4x-7y'=5$$

Откуда найдемъ: $x=3+7t,\ y'=1+4t$

слѣд. $y=(1+4t)3=3+12t.$

Примѣръ 2. *Рѣшить уравненіе* $8x+21y=28$.

Замѣтивъ, что 8 и 28 дѣлятся на 4, положимъ $y=4y'$ и сократимъ уравненіе на 4:

$$2x+21y'=7$$

Въ этомъ уравненіи 21 и 7 дѣлятся на 7; поэтому, положивъ $x=7x'$, сократимъ уравненіе на 7:

$$2x'+3y'=1.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x'=-1+3t;\ y'=1-2t$$

Слѣд.: $$x=-7+21t;\ y=4-8t$$

II. *При исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби можно пользоваться отрицательными остатками.*

Примѣръ. $$7x-19y=23$$

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+2y+\frac{2+5y}{7}.$$

Отъ дѣленія 19 на 7 получается остатокъ 5, большій половины 7-и; но если мы возьмемъ въ частномъ не 2, а 3, то получимъ отрицательный остатокъ—2, абсолютная величина котораго меньше половины 7-и. Очевидно, слѣдующее уравненіе будетъ съ меньшими коэффиціентами, если мы воспользуемся этимъ отрицательнымъ остаткомъ, т.-е. положимъ:

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+3y+\frac{2-2y}{7}.$$

III. *Если числитель дроби, которую надо приравнять произвольному цѣлому числу, содержитъ нѣкотораго множителя, то полезно его выключить.* Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ числитель дроби $\frac{2-2y}{7}$ содержитъ множителя 2; поэтому можно написать:

$$x=3+3y+\frac{2(1-y)}{7}.$$

Такъ какъ 2 есть число взаимно простое съ 7, то для дѣлимости произведенія 2 $(1-y)$ на 7, необходимо и достаточно, чтобы $1-y$ дѣлилось на 7. Приравнявъ $\frac{1-y}{7}$ произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$1-y=7t \text{ и } x=3+3y+2t$$

Откуда: $y=1-7t$ и $x=3+3(1-7t)+2t=6-19t$.

254. Зная одну пару цѣлыхъ рѣшеній, найти остальныя. Пусть какимъ-нибудь способомъ (напр., догадкой) мы нашли, что уравненіе $ax+by=c$ удовлетворяется при $x=\alpha$ и $y=\beta$; тогда, не рѣшая уравненія, легко составить общія формулы,

включающія въ себѣ всевозможныя цѣлыя рѣшенія. Для этого разсуждаемъ такъ: если α и β есть пара рѣшеній уравненія $ax+by=c$, то мы должны имѣть тождество:

$$a\alpha+b\beta=c$$

Вычтя почленно это тождество изъ даннаго уравненія, получимъ:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

Примемъ въ этомъ уравненіи $x-\alpha$ за одно неизвѣстное, а $y-\beta$ за другое; тогда свободный членъ уравненія будетъ 0, и потому мы можемъ воспользоваться формулами, выведенными для этого частнаго случая (§ 250):

$$\begin{cases} x-\alpha=-bt \\ y-\beta=at \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-\alpha=bt \\ y-\beta=-at \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x=\alpha-\mathbf{b}t \\ y=\beta+\mathbf{a}t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=\alpha+\mathbf{b}t \\ y=\beta-\mathbf{a}t \end{cases}$$

Эти общія формулы можно высказать такъ: *каждое неизвѣстное уравненія $ax+by=c$ равно своему соотвѣтствующему частному значенію, сложенному съ произведеніемъ произвольнаго цѣлаго числа на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, причемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.*

Примѣръ 1. Уравненіе $3x+4y=13$ удовлетворяется значеніями $x=3$, $y=1$. Поэтому общія формулы будутъ:

$$x=3-4t,\ y=1+3t$$

или:

$$x=3+4t,\ y=1-3t$$

Примѣръ 2. Уравненіе $7x-2y=11$ имѣетъ пару рѣшеній: $x=1$, $y=-2$; поэтому общія формулы будутъ:

$$x=1+2t,\ y=-2+7t$$

или:

$$x=1-2t,\ y=-2-7t$$

Замѣчаніе. Выведенныя въ этомъ параграфѣ формулы должны быть тождественны тѣмъ общимъ формуламъ, которыя получаются въ результатѣ обыкновеннаго рѣшенія неопредѣленнаго уравненія. Однако, вслѣдствіе произвольности числа t, эти формулы могутъ разниться по своему внѣшнему виду. Дѣйствительно, замѣняя t на $t\pm1$, $t\pm2$, $t\pm3$..., мы будемъ получать другія формулы:

$$\begin{cases} x=(\alpha\mp b)\mp bt \\ y=(\beta\pm a)\pm at \end{cases} \begin{cases} x=(\alpha\mp 2b)\mp bt \\ y=(\beta\pm 2a)\pm at \end{cases} \begin{cases} x=(\alpha\mp 3b)\mp bt \\ y=(\beta\pm 3a)\pm at \end{cases} \text{ и д. т.}$$

которыя, отличаясь внѣшнимъ видомъ, даютъ одинаковые результаты (конечно, не при одинаковыхъ значеніяхъ t). Полезно замѣтить, что во всѣхъ этихъ формулахъ коэффиціентъ при t одинъ и тотъ же; это обстоятельство можетъ, до нѣкоторой степени, служить повѣркою правильности рѣшенія: если въ результатѣ рѣшенія получается для какого-нибудь неизвѣстнаго формула, въ которой коэффиціентъ при произвольномъ цѣломъ числѣ не равенъ коэффиціенту при другомъ неизвѣстномъ, то рѣшеніе выполнено неправильно.

255. Теорема. *Если въ уравненіи* $ax \pm by = c$ *коэффиціенты* a *и* b *суть числа цѣлыя, положительныя и взаимно простыя, то, подставляя вмѣсто* x *числа: 0, 1, 2, 3... (*b*—1), или вмѣсто y числа: 0, 1, 2, 3... (a—1), мы найдемъ для другого неизвѣстнаго цѣлое значеніе и притомъ только одно.*

Доказательство. Изъ уравненія выводимъ:

$$y = \pm\frac{c-ax}{b}$$

Предварительно убѣдимся, что подставляя въ $c-ax$ вмѣсто x числа: 0, 1, 2... (b—1) и дѣля результаты на b, *мы не можемъ получить двухъ одинаковыхъ положительныхъ остатковъ* *). Предположимъ обратное, напр., что $c-am$ и $c-an$, гдѣ m и n суть два числа изъ ряда: 0, 1, 2... (b—1), при дѣленіи на b даютъ одинъ и тотъ же положительный остатокъ r. Назвавъ частное отъ дѣленія $c-am$ на b черезъ q и $c-an$ на b черезъ p, получимъ:

$$c-am=bq+r \text{ и } c-an=bp+r$$

Вычтя эти равенства почленно, найдемъ:

$$a(n-m)=b(q-p)$$

откуда:

$$\frac{a(n-m)}{b}=q-p$$

Такъ какъ $q-p$ есть число цѣлое, то $a\ (n-m)$ должно дѣлиться на b; но этого быть не можетъ, такъ какъ a и b числа взаимно простыя, а $n-m<b$; значитъ, $c-am$ и $c-an$ не могутъ дать одного и того же положительнаго остатка.

Итакъ, подставляя въ $c-ax$ вмѣсто x числа: 0, 1, 2... (b—1) и дѣля результаты на b, мы должны получать *различные* положительные остатки. Такъ какъ каждый остатокъ долженъ быть меньше b и число этихъ остатковъ есть b, то одинъ изъ нихъ долженъ равняться 0; другими словами, при одной изъ этихъ подстановокъ y окажется цѣлымъ числомъ.

Точно такъ же можно доказать теорему и относительно x.

Доказанная теорема позволяетъ найти пару рѣшеній посредствомъ нѣсколькихъ испытаній, число которыхъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше одинъ изъ коэффиціентовъ a и b.

Примѣръ: $5x-3y=17$.

*) Если при какой-нибудь изъ этихъ подстановокъ выраженіе $c-ax$ дало бы отрицательное число, мы могли бы увеличить частное на 1, чтобы и въ этомъ случаѣ получить *положительный* остатокъ.

Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ коэффиціентъ при y меньше коэффиціента при x, то для уменьшенія числа испытаній выгоднѣе дѣлать подстановки на мѣсто x:

$$y=\frac{5x-17}{3}\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{17}{3}\end{cases}\begin{cases}x=1\\ y=-4\end{cases}\begin{cases}x=2\\ y=-\frac{7}{3}.\end{cases}$$

Такимъ образомъ пара цѣлыхъ рѣшеній найдена: $x=1$, $y=-4$; значитъ общія формулы будутъ:

$$x=1+3t;\ y=-4+5t.$$

2. Нахожденіе цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

256. Всѣ цѣлыя рѣшенія уравненія $ax+by=c$ выражаются, какъ мы видѣли, формулами:

$$x=\alpha-bt \qquad y=\beta+at$$

Для того, чтобы x и y были числа положительныя, необходимо и достаточно, чтобы t удовлетворяло двумъ неравенствамъ:

$$\alpha-bt>0 \text{ и } \beta+at>0$$

Рѣшивъ эти неравенства, найдемъ для t два предѣла, которые ограничатъ произвольность въ выборѣ значеній этого числа. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 2 случая, смотря по тому, будетъ ли b положительно или отрицательно (a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, умноживъ, въ случаѣ надобности, всѣ члены уравненія на -1):

1. $b>0$. Изъ неравенствъ находимъ:

$$bt<\alpha \text{ и } at>-\beta$$

Откуда:
$$t<\frac{\alpha}{b} \text{ и } t>-\frac{\beta}{a}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ *конечное число* цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, именно столько, сколько есть цѣлыхъ чиселъ между $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$. Можетъ случиться, что между

этими предѣлами нѣтъ ни одного цѣлаго числа; тогда уравненіе не имѣетъ ни одного цѣлаго положительнаго рѣшенія.

II. $b<0$. Въ этомъ случаѣ неравенства даютъ:

$$t>\frac{\alpha}{b} \text{ и } t>-\frac{\beta}{a}.$$

(при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется). Такъ какъ эти предѣлы одинаковаго смысла, то достаточно взять изъ нихъ только одинъ, большій. Значитъ, въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ *безчисленное множество* цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ 1. *Найти цѣлыя положительныя рѣшенія ур.* $7x+9y=5$.

Такъ какъ коэффиціентъ при y положительное число, то утверждаемъ à priori, что уравненіе имѣетъ конечное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или не имѣетъ ихъ вовсе. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, найдемъ:

$$x=2-9t,\ y=-1+7t$$

Неравенства: $2-9t>0$ и $-1+7t>0$ даютъ:

$$t<\frac{2}{9} \text{ и } t>\frac{1}{7}.$$

Уравненіе не имѣетъ ни одного положительнаго цѣлаго рѣшенія.

Примѣръ 2. *Найти цѣлыя положительныя рѣшенія ур.* $41-13x=5y$.

Сдѣлавъ коэффиціентъ при x положительнымъ, получимъ:

$$13x+5y=41$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x=2-5t$, $y=3+13t$.

Неравенства: $2-5t>0$ и $3+13t>0$ даютъ:

$$t<\frac{2}{5} \text{ и } t>-\frac{3}{13}.$$

Между этими предѣлами заключается только одно цѣлое число 0. Положивъ $t=0$ найдемъ: $x=2$, $y=3$.

Примѣръ 3. *Найти цѣлыя положительныя рѣшенія ур.* $29x-30y=5$.

Утверждаемъ à priori, что это уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, находимъ:

$$x=-5+30t>0 \quad y=-5+29t>0$$
$$t>\frac{1}{6} \qquad t>\frac{5}{29}$$

Такъ какъ $^5/_{29}>^1/_6$, то достаточно положить, что $t>^5/_{29}$. Слѣд., $t=1, 2, 3, 4...$

ГЛАВА III.

Два уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными.

257. Пусть требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему:

$$2x+3y-7z=21; \qquad 5x-4y+6z=48$$

Исключивъ одно неизвѣстное, напр., z, получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными:

$$47x-10y=462$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x=6+10t, \qquad y=-18+47t,$$

гдѣ t есть произвольное число, пока рѣчь идетъ только о томъ, чтобы x и y были цѣлыя. Чтобы опредѣлить, какія значенія можно давать для t, чтобы и z было также цѣлымъ числомъ, вставимъ полученныя выраженія вмѣсто x и y въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е; отъ этого получимъ одно уравненіе съ неизвѣстными t и z:

$$161t-7z=63, \text{ или: } 23t-z=9$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$z=23t-9$$

Для полученія положительныхъ рѣшеній надо рѣшить неравенства:

$$6+10t>0;\ -18+47t>0,\ 23t-9>0.$$

Откуда находимъ: $t>-\frac{3}{5}$, $t>\frac{18}{47}$ и $t>\frac{9}{23}$.

Слѣд., для t можно брать числа: 1, 2, 3, 4...

Такимъ образомъ рѣшеніе системы 2-хъ уравненій первой степени съ 3-мя неизвѣстными сводится къ двукратному рѣшенію одного уравненія съ 2 неизвѣстными.

ОТДѢЛЪ VII.

Обобщеніе понятія о показателѣ.

Дробные показатели *).

258. Опредѣленіе дробнаго показателя. Мы видѣли (§ 146, теор. 2-я), что при извлеченіи корня изъ степени показатель подкоренного количества дѣлится на показателя корня, если такое дѣленіе выполняется нацѣло. Теперь мы условимся распространить это правило и на тотъ случай, когда показатель подкоренного количества не дѣлится нацѣло на показателя корня. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ извлеченія мы получимъ количество съ дробнымъ показателемъ; напр.:

$$\sqrt[3]{a^5} \text{ выразится } a^{\frac{5}{3}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{"} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

Такимъ образомъ, выраженіе $a^{\frac{m}{n}}$, согласно условію, есть только иной видъ радикала, у котораго показатель подкоренного количества есть m, а показатель радикала есть n.

Дробные показатели могутъ быть и *отрицательными* въ томъ же смыслѣ, въ какомъ вообще употребляются отрицательные показатели; такъ:

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

259. Ирраціональному выраженію придать видъ раціональнаго. Дробные показатели даютъ возможность предста-

*) Передъ этою статьей полезно повторить все, относящееся до отрицательныхъ показателей (см. §§ 51a, 71, 72, 73, 140a, часть § 146 и часть § 186).

вить ирраціональное выраженіе подъ видомъ раціональнаго; напр., выраженіе $3\sqrt{a}\sqrt[3]{x^2}$ можно представить такъ: $3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$. Конечно, такое преобразованіе измѣняетъ только внѣшній видъ выраженія, а не содержаніе его; однако подобное измѣненіе имѣетъ важное значеніе, такъ какъ *съ количествами, имѣющими дробныхъ показателей, можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для цѣлыхъ показателей*. Докажемъ это.

260. Основное свойство дробнаго показателя. *Если дробный показатель $\frac{m}{n}$ замѣнимъ равнымъ ему показателемъ $\frac{m'}{n'}$, то величина степени не измѣнится.*

Пусть $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$; требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$. Для доказательства замѣнимъ степени съ дробными показателями ихъ настоящими значеніями:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{\frac{m'}{n'}}=\sqrt[n']{a^{m'}}$$

Приведя эти радикалы къ одинаковому показателю, получимъ:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nn']{a^{mn'}};\quad \sqrt[n']{a^{m'}}=\sqrt[nn']{a^{m'n}}$$

Но изъ равенства: $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ слѣдуетъ, что $mn'=nm'$; значитъ:

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}}=\sqrt[nn']{a^{m'n}},\text{ т.-е. }\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}};\text{ или: }a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$$

Основываясь на доказанномъ свойствѣ, мы можемъ преобразовывать дробнаго показателя совершенно такъ, какъ *обыкновенную дробь*, лишь бы только преобразованіе не измѣняло величины показателя; напр., мы можемъ числителя и знаменателя дробнаго показателя умножить или раздѣлить на одно и то же число.

261. Дѣйствія надъ количествами съ дробными положительными показателями. Предстоитъ доказать, что къ дробнымъ показателямъ примѣнимы правила, выведенныя раньше для

цѣлыхъ показателей. Ходъ доказательства для всѣхъ дѣйствій одинъ и тотъ же: количества съ дробными показателями замѣняемъ радикалами; производимъ дѣйствіе по правилу о радикалахъ; результатъ выражаемъ дробнымъ показателемъ и затѣмъ его сравниваемъ съ тѣмъ, что требовалось доказать.

Умноженіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

$$Док.: a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=$$
$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Полагая $n=1$, или $q=1$, найдемъ, что правило о сложеженіи показателей распространяется и на тотъ случай, когда одинъ изъ показателей—дробь, а другой—цѣлое число.

Дѣленіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

$$Док.: a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}:a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=$$
$$=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Возвышеніе въ степень. Требуется доказать, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

$$Док.: \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=$$
$$=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{n}:p}$$

$$Док.: \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[np]{a^m}=a^{\frac{m}{np}}=a^{\frac{m}{n}:p}$$

Докажемъ еще, что теоремы о возвышеніи въ степень произведенія и дроби (§ 140) остаются вѣрными и для дробныхъ показателей.

I. Требуется доказать, что $(abc)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}c^{\frac{m}{n}}$

Док.: $(abc)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(abc)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m c^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{c^m}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}c^{\frac{m}{n}}$

II. Требуется доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

Док.: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

262. Дѣйствія надъ количествами съ дробными отрицательными показателями. Если показатели не только дробные, но и *отрицательные*, то и въ этомъ случаѣ къ нимъ можно примѣнять правила, относящіяся до положительныхъ показателей. Покажемъ это для какого-нибудь одного дѣйствія, напр., для умноженія.

Пусть требуется доказать, что $a^{-\frac{m}{n}}.a^{-\frac{p}{q}}=a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$

Док.: $a^{-\frac{m}{n}}.a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}$

$=a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и всѣ дѣйствія можно совершать по правиламъ, относящимся до положительныхъ показателей.

263. Понятіе о несоизмѣримомъ показателѣ. Показателями могутъ быть и числа *несоизмѣримыя;* въ этомъ случаѣ истинное значеніе степени есть *предѣлъ*, къ которому стремится степень съ соизмѣримымъ показателемъ, все болѣе и болѣе приближающимся къ величинѣ несоизмѣримаго показателя; такъ, $a^{\sqrt{2}}$ есть предѣлъ, къ которому стремится рядъ степеней: $a^{1,4}$, $a^{1,41}$, $a^{1,414}$, $a^{1,4142}$, въ которыхъ показатели

суть приближенныя значенія $\sqrt{2}$, вычисленныя все съ большей и большей степенью приближенія.

263, a. **Радикалы съ дробными и отрицательными показателями.** Въ этой книгѣ разсматриваются радикалы только съ *цѣлыми положительными* показателями. Но можно обобщить понятіе о радикалѣ на показателей какихъ угодно. Напр., $\sqrt[-3]{a}$, означаетъ такое количество, которое, возвышенное въ степень съ показателемъ -3, даетъ подкоренное количество a; подобно этому $\sqrt[\frac{3}{4}]{a}$ означаетъ количество, котораго степень съ показателемъ $^3/_4$ равна a. Такъ какъ при возвышеніи въ степень показатели отрицательные и дробные подчиняются тѣмъ же правиламъ, какъ и показатели цѣлые положительные, то отсюда легко вывести заключеніе, что дѣйствія надъ радикалами съ показателями какими угодно производятся такъ же, какъ и надъ радикалами съ показателями положительными цѣлыми.

Примѣры на дѣйствія съ дробными показателями.

1) $$\frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{1,5}}\cdot\frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{a^3b^5}}=\frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{12}}}=$$

$$=\frac{10a^{\frac{31}{12}}b^{-\frac{17}{6}}}{3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{23}{12}}}=\frac{10}{3}a^{\frac{37}{12}}b^{-\frac{57}{12}}=\frac{10}{3}\sqrt[12]{\frac{a^{37}}{b^{57}}}=\frac{10a^3}{3b^4}\sqrt[12]{\frac{a}{b^9}}$$

2) $$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=$$

$$=a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc}.$$

3) $$\sqrt{12a^{-4}b^3}:\left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(2.3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2}$$

$$=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^3\sqrt{ab}.$$

ОТДѢЛЪ VIII.

Прогрессіи и логариѳмы.

ГЛАВА I.

Прогрессіи.

Ариѳметическая прогрессія.

264. Опредѣленіе. *Ариѳметической прогрессіей наз. рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же числомъ, положительнымъ или отрицательнымъ.*

Такъ, два ряда:

$\div 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$

$\div 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$

составляютъ ариѳметическія прогрессіи, потому что каждое число въ нихъ, начиная со второго, равно предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же для каждаго ряда числомъ, именно: въ первомъ ряду съ числомъ 3, а во второмъ съ числомъ -2.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея *членами.* Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить къ предшествующему члену, чтобы получить послѣдующій, наз. *разностью прогрессіи.*

Прогрессія наз. *возрастающею*, когда члены ея увеличиваются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; она наз. *убывающею,* когда члены ея уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ

начала ряда; разность первой прогрессіи—положительное число, второй—отрицательное.

Для обозначенія того, что данный рядъ представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, ставятъ иногда въ началѣ ряда знакъ $\div$.

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, разность d, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

265. Теорема. *Всякій членъ ариѳметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.*

Доказательство. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div a,\ b,\ c,\ \partial \ldots k,\ l,$$

у которой разность d. Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

2-й членъ b, имѣющій передъ собою 1 чл. $=a+d$
3-й „ c, „ „ „ 2 „ $=b+d=a+2d$
4-й „ ∂, „ „ „ 3 „ $=c+d=a+3d$
. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, потому что, переходя отъ одного члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ прибавить 1 разъ разность.

Такимъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи равенъ $a+9d$; вообще, m-й членъ равенъ $a+d(m-1)$.

Слѣдствіе 1-е. Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.-е. къ n-му, получимъ:

$$l=a+d(n-1)$$

т.-е. *послѣдній членъ ариѳметической прогрессіи равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ членовъ безъ единицы.*

Примѣръ 1. *Опредѣлить 12-й членъ прогрессіи: 3, 7, 11...*

Такъ какъ разность данной прогрессіи равна 4, то 12-й членъ ея будетъ:

$$3+4.11=47.$$

Примѣръ 2. *Найти 10-й членъ прогрессіи: 40, 37, 34...*

Такъ какъ разность этой прогрессіи равна -3, то 10-й членъ ея будетъ:

$$40+(-3).9=40-27=13.$$

Слѣдствіе 2-е. Ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, разность d и число членовъ n, можно изобразить такъ:

$$\div a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d \ldots . a+d(n-1).$$

266. Лемма. *Сумма двухъ членовъ ариѳметической прогрессіи, равноотстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.*

Доказательство. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div a,\ b \ldots . e \ldots . h \ldots . k,\ l$$

съ разностью d и положимъ, что e есть m-й членъ отъ начала, а h есть m-й членъ отъ конца прогрессіи. Тогда, по доказанному, имѣемъ:

$$e=a+d(m-1) \qquad [1]$$

Для опредѣленія члена h замѣтимъ, что если данную прогрессію напишемъ съ конца:

$$l,\ k \ldots h \ldots e \ldots b,\ a$$

то получимъ тоже прогрессію, у которой первый членъ есть l, а разность равна $-d$. Въ этой прогрессіи членъ h есть m-й отъ начала, а потому:

$$h=l+(-d)(m-1)=l-d(m-1) \qquad [2]$$

Сложивъ равенства [1] и [2], получимъ:

$$e+h=a+l$$

Напр., въ прогрессіи: 12, 7, 2, -3, -8, -13, -18 имѣемъ:

$$12+(-18)=-6;\ 7+(-13)=-6;\ 2+(-8)=-6.$$

267. Теорема. *Сумма всѣхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число всѣхъ членовъ.*

Доказательство. Сложивъ почленно два равенства:

$$\begin{cases} s=a+b+c\ldots.+i+k+l \\ s=l+k+i\ldots.+c+b+a \end{cases}$$

получимъ: $2s=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(l+a)$.

Двучлены, стоящіе внутри скобокъ, представляютъ собою суммы членовъ, равно отстоящихъ отъ концовъ прогрессіи; по доказанному, каждая изъ этихъ суммъ равна $a+l$; подставивъ, найдемъ:

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots[n \text{ разъ}]$$

т.-е $\qquad 2s=(a+l)n;\qquad$ откуда: $\mathbf{s=\dfrac{(a+l)n}{2}}$.

Замѣчаніе. Если въ формулу для суммы вмѣсто l вставимъ равное ему выраженіе $a+d(n-1)$, то получимъ:

$$s=\frac{[2a+d(n-1)]n}{2}.$$

Эта формула опредѣляетъ сумму въ зависимости отъ перваго члена, разности и числа членовъ данной прогрессіи.

Примѣръ 1. *Опредѣлить сумму натуральныхъ чиселъ отъ* 1 *до* n *включительно*.

Рядъ: 1, 2, 3,... $(n-1)$, n представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть 1, разность 1, число членовъ n, послѣдній членъ тоже n; поэтому:

$$s=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Примѣръ 2. *Найти сумму первыхъ* n *нечетныхъ чиселъ*.

Рядъ: 1, 3, 5, 7,... есть ариѳметическая прогрессія, у которой первый членъ есть 1 и разность 2. Если возьмемъ n членовъ, то послѣдній членъ будетъ $1+2(n-1)=2n-1$. Поэтому:

$$s=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2.$$

Примѣръ 3. *Найти сумму 10-и членовъ прогрессіи: 3, $2^1/_2$, 2...*

Въ этой прогрессіи разность равна $-{}^1/_2$; поэтому 10-й членъ будетъ $3-{}^1/_2 \,.\, 9=-1{}^1/_2$, и искомая сумма выразится:

$$s=\frac{[3+(-1{}^1/_2)]10}{2}=7\frac{1}{2}.$$

Дѣйствительно: $3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$.

268. Такъ какъ для 5-ти величинъ a, l, d, n и s мы имѣемъ два уравненія:

$$1)\ l=a+d(n-1) \text{ и } 2)\ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

то по даннымъ значеніямъ трехъ изъ этихъ величинъ мы можемъ находить значенія остальныхъ двухъ. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. *Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой сумма равна 12, первый членъ 7, а разность есть—2.*

Для этой задачи уравненія даютъ:

$$l=7-2(n-1)=9-2n \text{ и } 12=\frac{(7+l)n}{2}.$$

Откуда подстановкою находимъ:

$$12=\frac{(7+9-2n)n}{2}=(8-n)n$$

или $n^2-8n+12=0$,

слѣд.: $n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$

значитъ: $n_1=6$, $n_2=2$.

Такимъ образомъ, предложенная задача имѣетъ два отвѣта: число членовъ прогрессіи или 6, или 2. И дѣйствительно, двѣ прогрессіи:

$$\div 7,\ 5, \text{ и } \div 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

имѣютъ одну и ту же сумму 12.

Геометрическая прогрессія.

269.. Опредѣленіе. *Геометрической прогрессіей наз. рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же число.* Такъ, три ряда:

$$\div\div 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$$
$$\div\div 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512$$
$$\div\div 20,\ 10,\ 5,\ {}^5/_2,\ {}^5/_4,\ {}^5/_8,\ {}^5/_{16},\ {}^5/_{32}$$

представляютъ геометрическія прогрессіи, потому что въ этихъ рядахъ каждое число, начиная со второго, получается изъ предшествующаго умноженіемъ: въ первомъ ряду на 3, во второмъ на—2, въ третьемъ на $^1/_2$.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея *членами*. Постоянное для каждой прогрессіи число, на которое надо умножить какой-нибудь членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, наз. *знаменателемъ прогрессіи*.

Геометрическая прогрессія наз. *возрастающею* или *убывающею*, смотря по тому, увеличивается ли или уменьшается *абсолютная величина* членовъ прогрессіи по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; такъ, изъ трехъ указанныхъ выше прогрессій первая и вторая—возрастающія, а третья—убывающая. Въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей меньше 1.

Для обозначенія того, что данный рядъ есть прогрессія геометрическая, иногда ставятъ въ началѣ его знакъ $\div\div$

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, знаменателя q, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

270. Теорема. *Всякій членъ геометрической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.*

Доказательство. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div\div a,\ b,\ c, \ldots h \ldots i,\ k,\ l,$$

у которой знаменатель есть q. По опредѣленію прогрессіи имѣемъ:

2-й членъ b, имѣющій передъ собою 1 чл. $=aq$
3-й „ c, „ „ „ 2 „ $=bq=aq^2$
4-й „ d, „ „ „ 3 „ $=cq=aq^3$
. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, такъ какъ, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ умножить еще 1 разъ на знаменателя прогрессіи.

Вообще, если члену h предшествуетъ m членовъ, то $h=aq^m$.

Слѣдствіе 1-е. Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т. е. къ n-му, получимъ:

$$l=aq^{n-1}$$

т.-е. *послѣдній членъ геометрической прогрессіи равенъ первому ея члену, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу всѣхъ членовъ безъ единицы.*

Примѣръ 1. *Опредѣлить 6-й членъ прогрессіи, у которой первый членъ 3, а знаменатель 4.*

6-й членъ $=3.4^5.=3072$.

Примѣръ 2. *Опредѣлить 10-й членъ прогрессіи* $\div\!\!\div 20,10\ldots$

Такъ какъ знаменатель этой прогрессіи есть $^1/_2$, то 10-й членъ $=20.\ (^1/_2)^9=20.\ ^1/_{512}=^5/_{128}$.

Примѣръ 3. *Опредѣлить 4-й членъ прогрессіи:*

$$\div\!\!\div \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}\ldots$$

$$\text{Знам.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{4-й членъ}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Слѣдствіе 2-е. Геометрическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, число членовъ n и знаменатель q, можно изобразить такъ:

$$\div\!\!\div a,\ aq,,\ aq^2,\ aq^3\ldots.aq^{n-1}.$$

271. Теорема. *Сумма всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи равна дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею*, т.-е.

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Доказательство. По опредѣленію геом. прогрессіи имѣемъ:

$$\begin{cases} b=aq \\ c=bq \\ d=cq \\ \dots \\ \dots \\ k=iq \\ l=kq \end{cases}$$

Сложимъ эти равенства почленно; тогда въ лѣвой части получается сумма всѣхъ членовъ безъ перваго, а въ правой—произведеніе знаменателя q на сумму всѣхъ членовъ безъ последняго:

$$s-a=(s-l)q.$$

Остается рѣшить это уравненіе относительно s:

$$s-a=sq-lq;\ lq-a=sq-s=s(q-1)$$

$$s=\frac{lq-a}{q-1}. \qquad [1]$$

271,*а*. Два другія выраженія для суммы. 1) Умноживъ числителя и знаменателя формулы [1] на—1, придадимъ другой видъ выраженію суммы:

$$s=\frac{a-lq}{1-q}. \qquad [2]$$

Послѣдняя формула удобна для прогрессіи убывающей, потому что тогда $a>lq$ и $1>q$.

2) Замѣнивъ l въ равенствахъ [1] и [2] равнымъ ему выраженіемъ aq^{n-1}, найдемъ:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1} \text{ или } s=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Эти формулы удобно употреблять тогда, когда послѣдній членъ неизвѣстенъ.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму 10-и членовъ прогрессіи $1, 2, 2^2 \ldots$ Въ этой прогрессіи $a=1$, $q=2$, $l=1.2^9=2^9$; поэтому:

$$s=\frac{2^9.2-1}{2-1}=2^{10}-1=1023.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить сумму 8-и членовъ прогрессіи:

$$\div\div 1, \tfrac{1}{3}, \ldots.$$

Здѣсь $a=1$, $q={}^1/_3$, $l=1.({}^1/_3)^7=({}^1/_3)^7$, поэтому:

$$s=\frac{1-({}^1/_3)^8}{1-{}^1/_3}=\frac{3280}{2187}.$$

272. Два уравненія: $l=aq^{n-1}$ и $s=\frac{lq-a}{q-1}$ содержатъ 5 величинъ и потому позволяютъ по даннымъ значеніямъ трехъ изъ нихъ найти значенія остальныхъ двухъ. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. *По даннымъ* s, q *и* n *найти* a *и* l.

Изъ уравненія:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

находимъ:

$$a=\frac{s(q-1)}{q^n-1}$$

Послѣ чего получимъ: $l=aq^{n-1}=\frac{s(q-1)}{q^n-1}q^{n-1}$.

Безконечная геометрическая прогрессія.

273. Если рядъ чиселъ, составляющихъ прогрессію, можетъ быть продолжаемъ безъ конца, то прогрессія наз. *безконечной*. Относительно такихъ прогрессій докажемъ слѣдующія истины.

Теорема 1. *Абсолютная величина членовъ безконечной геометрической возрастающей прогрессіи, по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, можетъ превзойти какое угодно большое число.*

Если q есть абс. величина знаменателя геометрической

прогрессіи и a абс. величина ея перваго члена, то абс. величина членовъ прогрессіи выразится такъ:

$$\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots aq^n \ldots$$

Требуется доказать, что при неограниченномъ возрастаніи n членъ aq^n, если $q>1$, можетъ превзойти какое угодно большое число, напр., данное число A. Для этого возьмемъ сумму n членовъ такой прогрессіи:

$$1+q+q^2+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^{n-1}q-1}{q-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Такъ какъ $q>1$, то каждое слагаемое этой суммы, начиная со второго, больше 1, а потому вся сумма больше 1, повторенной n разъ, т.-е больше n; значитъ:

$$\frac{q^n-1}{q-1}>n;\ \text{откуда:}\ q^n>(q-1)n+1.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число a, мы не измѣнимъ знака неравенства; поэтому:

$$aq^n>a(q-1)n+a.$$

Чтобы aq^n сдѣлалось больше числа A, достаточно взять n такимъ, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$a(q-1)n+a>A.$$

откуда: $n>\frac{A-a}{a(q-1)}$, что вполнѣ возможно, такъ какъ n возрастаетъ безпредѣльно.

Примѣръ. Пусть $a=1$, $q=1{,}2$ и $A=1000$. Тогда

$$n>\frac{1000-1}{1(1,2-1)},\ \text{т.-е.}\ n>\frac{999}{0{,}2}\ \text{или}\ n>4995.$$

Значитъ, можемъ ручаться, что всѣ члены, слѣдующіе за 4995-мъ членомъ, окажутся болѣе 1000.

Теорема 2. *Абсолютная величина членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи, по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, можетъ сдѣлаться меньше какого угодно малаго положительнаго числа.*

Если безконечная прогрессія:

$$\div\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\ldots\ldots$$

есть прогрессія убывающая, т.-е. если абс. величина ея знаменателя $q<1$, то рядъ:

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3}\ldots\ldots$$

представляетъ собою геометрическую прогрессію возрастающую, такъ какъ знаменатель ея есть $^1/_q$ и, слѣд., абс. величина этого знаменателя больше 1. По доказанному, абс. величина членовъ второй прогрессіи увеличивается безпредѣльно; это можетъ быть только тогда, когда абс. величина знаменателей дробей: $\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}\ldots\ldots$ уменьшается безпредѣльно. Такъ какъ эти знаменатели суть члены данной убывающей прогрессіи, то теорема доказана.

Теорема 3. *Сумма членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи равна частному отъ дѣленія перваго члена на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи,*

$$\text{т.-е. } s=\frac{a}{1-q}.$$

Подъ *суммою* s членовъ безконечной прогрессіи разумѣютъ *предѣлъ, къ которому стремится сумма первыхъ ея* n *членовъ при неограниченномъ возрастаніи* n.

Для доказательства возьмемъ въ убывающей прогрессіи n членовъ отъ начала; тогда сумма взятыхъ членовъ будетъ:

$$a+aq+aq^2+\ldots\ldots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Предположимъ теперь, что число n неограниченно увеличивается. Тогда въ дроби $\frac{aq^n}{1-q}$, по доказанному, абс. величина числителя можетъ сдѣлаться какъ угодно малой, вслѣдствіе чего и сама дробь можетъ сдѣлаться по абс. величинѣ какъ угодно малою; значитъ, взятая сумма будетъ

при этомъ приближаться къ *постоянному числу* $\frac{a}{1-q}$ какъ угодно близко; а это и требовалось доказать.

Примѣръ 1. *Найти сумму:* $1+{}^1/_2+{}^1/_4+\ldots$

Здѣсь $a=1$, $q={}^1/_2$; поэтому $s=\frac{1}{1-{}^1/_2}=2$.

Примѣръ 2. *Найти сумму:* ${}^3/_2+(-{}^2/_3)+{}^8/_{27}\ldots$

Здѣсь $a={}^3/_2$, $q=-{}^4/_9$; поэтому:

$$s=\frac{{}^3/_2}{1+{}^4/_9}=\frac{{}^3/_2}{{}^{13}/_9}=\frac{27}{26}.$$

Примѣръ 3. *Опредѣлить точное значеніе чистой періодической дроби: 0,232323...*

Точное значеніе этой дроби есть предѣлъ суммы $\frac{23}{100}+$ $+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\ldots..$, которая, очевидно, представляетъ собою сумму членовъ геометрической прогрессіи; у нея первый членъ есть ${}^{23}/_{100}$, а знаменатель $={}^1/_{100}$; поэтому:

$$s=\frac{{}^{23}/_{100}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{{}^{23}/_{100}}{{}^{99}/_{100}}=\frac{23}{99}.$$

Такое же число мы получили бы по правилу, указываемому въ ариѳметикѣ.

Примѣръ 4. *Опредѣлить точное значеніе смѣшанной періодической дроби 0,3545454...*

Точное значеніе этой дроби есть предѣлъ суммы:

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}+\frac{54}{10000000}+\ldots.$$

Слагаемыя этой суммы, начиная со второго, суть члены безконечной геометрической убывающей прогрессіи, у которой первый членъ есть $\frac{54}{1000}$ и знаменатель $\frac{1}{100}$.

Поэтому предѣлъ написанной выше суммы равенъ:

$$\frac{3}{10}+\frac{{}^{54}/_{1000}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3.99+54}{990}$$

$$=\frac{3.100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}.$$

Такое же число мы получили бы по правилу ариѳметики.

ГЛАВА II.

Логариѳмы.

Предварительныя понятія.

Замѣчаніе. Возьмемъ такое равенство: $a^b=c$. Если числа a и b извѣстны, а требуется найти c, то дѣйствіе, потребное для этого, называется, какъ мы знаемъ, *возвышеніемъ въ степень*. Обратимъ теперь вниманіе на дѣйствія, *обратныя* возвышенію въ степень. Такихъ дѣйствій можетъ быть *два*, смотря по тому, какое изъ двухъ чиселъ a или b неизвѣстно. Если даны c и b, а требуется отыскать a, то это дѣйствіе, какъ мы знаемъ, наз. *извлеченіемъ корня;* число a есть корень b-й степени изъ c и можно писать: $a=\sqrt[b]{c}$. Предположимъ теперь, что даны c и a, а требуется найти показателя b. Тогда мы получаемъ новое дѣйствіе, которое въ элементарной алгебрѣ подробно не разсматривается. Мы укажемъ въ этой главѣ главнѣйшія свойства этого дѣйствія, имѣя въ виду его практическія примѣненія.

274. Опредѣленіе логариѳма. *Логариѳмомъ числа N по основанію* a *называется показатель степени, въ которую надо возвысить* a, *чтобы получить N.*

Такъ, если имѣемъ равенство: $N=a^x$, то можемъ сказать, что x есть логариѳмъ числа N по основанію a; это можно выразить также такимъ обозначеніемъ:

$$log_a N=x \text{ или } lg\ N=x, \text{ или } LN=x,$$

гдѣ знаки: log, lg и L сокращенно обозначаютъ слово „логариѳмъ". Иногда для обозначенія того, по какому основанію берется логариѳмъ, внизу этихъ знаковъ ставятъ букву или число, означающее основаніе; напр., равенство $log_a N=x$ означаетъ, что логариѳмъ числа N по основанію a есть x.

Примѣры. 1) Возьмемъ за основаніе число 4; тогда:

$log\ 16=2$,	потому что	$4^2=16$
$log\ 64=3$,	„ „	$4^3=64$
$log\ 4=1$,	„ „	$4^1=4$
$log\ 2=\frac{1}{2}$,	„ „	$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$
$log\frac{1}{4}=-1$,	„ „	$4^{-1}=\frac{1}{4}$
$log\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$,	„ „	$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$.

2) Подобно этому найдемъ, что если основаніе равно 10, то: $log\ 10=1$, $log\ 100=2$, $log\ 1000=3$; $log\ 0{,}1=-1$, $log\ 0{,}01=$ $=-2$; $log\ 0{,}001=-3$; и т. д.

3) $log_8\ 4096=4$, потому что $8^4=4096$; $log_{64}\ 8={}^1/_2$, потому что $64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8$; и т. п.

275. Нѣкоторыя свойства логариѳмовъ. Замѣтимъ прежде всего, что если x есть дробь, то a^x представляетъ собою корень, котораго показатель равенъ знаменателю дроби. Но корни, какъ мы видѣли (§ 225), имѣютъ нѣсколько значеній, изъ которыхъ только одно—ариѳметическое. Условимся въ этой статьѣ придавать степенямъ съ дробными показателями только одно *ариѳметическое* значеніе; при этомъ условіи степень a^x обладаетъ многими замѣчательными свойствами. Укажемъ тѣ изъ нихъ, которыми намъ придется пользоваться впослѣдствіи. Въ примѣненіи къ логариѳмамъ эти свойства можно выразить такъ:

I. *При положительномъ основаніи отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ;* другими словами равенство $N=a^x$ невозможно, если N есть отрицательное число, а a положительное.

Для этого достаточно показать, что какія бы значенія мы ни давали логариѳму x, выраженіе a^x, при a положительномъ, всегда даетъ только положительныя числа.

Это очевидно, когда x есть цѣлое и положительное число.

Когда x есть положительная дробь, напр. $\frac{p}{q}$, то $a^x=a^{\frac{p}{q}}=$ $=\sqrt[q]{a^p}$, а изъ всѣхъ значеній корня мы условились брать только ариѳметическое, т.-е. положительное.

Если x есть положительное несоизмѣримое число, то a^x, представляя собою предѣлъ перемѣннаго положительнаго числа, должно быть и въ этомъ случаѣ положительное число.

Наконецъ, когда x отрицательное число, напр., $-m$, то $a^x=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$; такъ какъ a^m положительное число, то и дробь $\frac{1}{a^m}$ также положительное число.

II. *Когда основаніе больше 1, то логариѳмы чиселъ, большихъ единицы, положительны, а логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны.*

Для этого достаточно показать, что если въ выраженіи a^x, гдѣ $a>1$, давать показателю x положительныя значенія, то будутъ получаться числа, большія единицы; а если въ томъ же выраженіи давать x отрицательныя значенія, то будутъ получаться числа, меньшія единицы.

Когда x есть цѣлое положительное число, то $a^x=a.a.a...$ и такъ какъ отъ каждаго умноженія на a, большее единицы, число увеличивается, то $a.a.a...>a>1$.

Когда x есть положительная дробь, напр. $\frac{p}{q}$, то $a^x=a^{\frac{p}{q}}=$ $=\sqrt[q]{a^p}$. Такъ какъ $a^p>1$, то и $\sqrt[q]{a^p}>\sqrt[q]{1}$, т.-е. $\sqrt[q]{a^p}>1$.

Когда x есть положительное несоизмѣримое число, то a^x, представляя собою предѣлъ перемѣннаго числа, большаго 1, не можетъ быть меньше 1 *).

Если же x есть отрицательное число, напримѣръ $-m$, то $a^x=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$. Такъ какъ $a^m>1$, то $\frac{1}{a^m}<1$, т.-е. $a^{-m}<1$.

III. *Если основаніе больше 1, то большему логариѳму соотвѣтствуетъ большее число и наоборотъ.*

Для этого достаточно показать, что если въ выраженіи a^x, гдѣ $a>1$, увеличимъ показателя, то увеличится и численная величина степени.

Увеличимъ x на какое-нибудь *положительное* число h и возьмемъ частное $a^{x+h}: a^x=a^h$. Такъ какъ $a^h>1$ (по доказанному выше), то дѣлимое больше дѣлителя, т.-е. $a^{x+h}>a^x$.

IV. *При всякомъ основаніи логариѳмъ самого основанія равенъ 1, а логариѳмъ единицы есть 0.*

Это видно изъ равенствъ: $a^1=a$ и $a^0=1$, откуда:

$$log_a a=1;\ log\ 1=0 \ **)$$

---

*) Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ *больше* 1.

**) Мы приняли безъ доказательства, что $a^0=1$, основываясь на значеніи нулевого показателя, приданномъ ему условно въ статьѣ о дѣленіи одинаковыхъ степеней одного и того же количества (§ 51). Но выраженіе a^0 можно разсматривать въ другомъ значеніи, а именно, какъ *предѣлъ, къ которому стремится* a^x *по мѣрѣ приближенія* x къ 0. Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ равенъ 1. (См. Н. Билибинъ. „Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ, 1899 г.", стр. 512).

V. *Когда основаніе больше единицы, то при увеличеніи логариѳма отъ* 0 *до* $+\infty$ *числа возрастаютъ отъ* 1 *до* $+\infty$, *а при уменьшеніи логариѳма отъ* 0 *до* $-\infty$ *числа уменьшаются отъ* 1 *до* 0.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно разсмотрѣть двѣ безконечныя геометрическія прогрессіи:

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3, \ldots a^n,\ a^{n+1}, \ldots$$
$$a^0,\ a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3}, \ldots a^{-n},\ a^{-(n+1)} \ldots$$

Когда $a>1$, то первая прогрессія возрастающая (потому что ея знаменатель $a>1$), а вторая—убывающая (потому что ея знаменатель $a^{-1}=\frac{1}{a}<1$). По мѣрѣ удаленія отъ начала ряда, какъ мы видѣли въ статьѣ о безконечныхъ прогрессіяхъ (§ 273), члены первой прогрессіи увеличиваются *безпредѣльно*, а члены второй приближаются къ *предѣлу* 0; это можно символически выразить такъ:

$$a^{+\infty}=+\infty;\ a^{-\infty}=0$$
т.-е. $log\,(+\infty)=+\infty;\ log\ 0=-\infty$

VI. *При положительномъ основаніи, не равномъ 1, всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ* (соизмѣримый или несоизмѣримый) *и притомъ единственный.*

(Строгое доказательство этого свойства выходитъ изъ предѣловъ элементарной алгебры *). Ограничимся разъясненіемъ, что при положительномъ a, не равномъ 1, для всякаго положительнаго числа N можно найти такое *соизмѣримое* число, которое или въ точности равняется логариѳму N, или отличается отъ него такъ мало, какъ угодно. Для этого, предположивъ что α означаетъ какую-нибудь очень малую соизмѣримую дробь (напр. $^1/_{1000}$), возьмемъ неограниченный въ обѣ стороны рядъ чиселъ:

$$\ldots\ldots a^{-3\alpha},\ a^{-2\alpha},\ a^{-\alpha},\ a^0,\ a^{\alpha},\ a^{2\alpha},\ a^{3\alpha}, \ldots\ldots$$

Если въ этомъ ряду возьмемъ числа, слѣдующія вправо за $a^0=1$, то получимъ безконечную геометрическую прогрес-

---

*) Доказательство, основанное на теоріи предѣловъ, можно найти въ подробныхъ курсахъ алгебры, напр., въ книгѣ: „*Н. Билибинъ. Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ*. Изд. третье, 1899 г.“, стр. 514 и слѣд.

сію, возрастающую при $a>1$ (такъ какъ тогда $a^\alpha>1$) и убывающую при $a<1$ (такъ какъ тогда $a^\alpha<1$). Если же въ этомъ ряду будемъ переходить отъ a^0 влѣво, то будемъ имѣть безконечную геом. прогрессію, убывающую при $a>1$ и возрастающую при $a<1$. По свойству безконечныхъ геометрическихъ прогрессій (§ 273) по мѣрѣ удаленія отъ a^0 члены возрастающей прогрессіи могутъ превзойти всякое большое число, а члены убывающей прогрессіи могутъ сдѣлаться меньше всякаго малаго положительнаго числа. Изъ этого слѣдуетъ, что каково бы ни было положительное число N (очень велико, или очень мало), пробѣгая написанный выше рядъ, мы или встрѣтимъ въ немъ нѣкоторое число, напр., $a^{k\alpha}$, въ точности равное N, или найдемъ два рядомъ стоящія числа, напр., $a^{k\alpha}$ и $a^{(k+1)\alpha}$, такія, что

$$a^{k\alpha}<N<a^{(k+1)\alpha}$$

Въ первомъ случаѣ $k\alpha$ будетъ точнымъ логариѳмомъ N; во второмъ случаѣ числа $k\alpha$ и $(k+1)\alpha$ будутъ приближенными соизмѣримыми значеніями $\log N$ съ точностью до α. Такъ какъ число α можетъ быть какъ угодно мало, то, значитъ, приближенныя значенія $\log N$ существуютъ съ какою угодно степенью приближенія.

Логариѳмъ произведенія, частнаго, степени и корня.

276. Теорема 1. *Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.*

Док. Пусть N, N_1, N_2 будутъ какія-нибудь числа, имѣющія соотвѣтственно логариѳмы: x, x_1, x_2 по одному и тому же основанію a. По опредѣленію логариѳма можемъ положить:

$$N=a^x,\ N_1=a^{x_1},\ N_2=a^{x_2}.$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ

$$NN_1N_2=a^x\ a^{x_1}\ a^{x_2}=a^{x+x_1+x_2}$$

Откуда $\quad \log(NN_1N_2)=x+x_1+x_2$

Но $\quad x=\log N,\ x_1=\log N_1,\ x_2=\log N_2$

Поэтому: $\quad \log(NN_1N_2)=\log N+\log N_1+\log N_2.$

Очевидно, это разсужденіе вполнѣ примѣнимо къ какому угодно числу сомножителей.

Теорема 2. *Логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя.*

Док. Раздѣливъ почленно два равенства:

$$N=a^x \qquad N_1=a^{x_1}$$

получимъ:
$$\frac{N}{N_1}=\frac{a^x}{a^{x_1}}=a^{x-x_1}$$

Откуда:
$$\log\frac{N}{N_1}=x-x_1=\log N-\log N_1.$$

Теорема 3. *Логариѳмъ степени равенъ логариѳму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.*

Док. Возвысимъ обѣ части равенства $N=a^x$ въ n-ую степень, гдѣ n можетъ быть цѣлымъ и дробнымъ, положительнымъ и отрицательнымъ:

$$N^n=(a^x)^n=a^{xn}$$

Откуда:
$$\log N^n=xn=(\log N)n.$$

Теорема 4. *Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.*

Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей. Дѣйствительно:

$$\log\sqrt[n]{N}=\log N^{\frac{1}{n}}=(\log\ N).\frac{1}{n}=\frac{\log N}{n}.$$

277. Логариѳмированіе алгебраическаго выраженія. *Логариѳмировать данное выраженіе значитъ выразить логариѳмъ его посредствомъ логариѳмовъ отдѣльныхъ чиселъ, составляющихъ выраженіе.* Пусть требуется логариѳмировать слѣдующее выраженіе, которое обозначимъ одною буквой N:

$$N=\frac{3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}}{4m^3\sqrt[6]{y}}$$

Замѣтивъ, что это выраженіе представляетъ собою дробь, пишемъ, на основаніи теоремы 2-й:

$$logN = log(3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}) - log(4m^3\sqrt[6]{y}).$$

Затѣмъ, примѣняя теорему 1-ю, получимъ:

$$logN = lg3 + lga^2 + lg\sqrt{b\sqrt[3]{x}} - lg4 - lgm^3 - lg\sqrt[6]{y}$$

и далѣе, по теоремѣ 3-й и 4-й:

$$lgN = lg3 + 2lga + \frac{1}{2}lg\ (b\sqrt[3]{x}) - lg4 - 3lgm - \frac{1}{6}lgy =$$

$$= lg3 + 2lga + \frac{1}{2}\left(lgb + \frac{1}{3}lgx\right) - lg4 - 3lgm - \frac{1}{6}lgy =$$

$$lg3 + 2lga + \frac{1}{2}lgb + \frac{1}{6}lgx - lg4 - 3lgm - \frac{1}{6}lgy.$$

Логариѳмировать можно только такія выраженія, которыя представляютъ собою произведеніе, частное, степень или корень, но не сумму и не разность.

Когда желаютъ логариѳмировать сумму или разность, то, если возможно, предварительно приводятъ ихъ къ виду, *удобному для логариѳмированія*; напр.:

$$log(a^2 - b^2) = lg[(a+b)(a-b)] = lg(a+b) + lg(a-b);$$

$$log(a^2 + 2a + 1 - b^2) = lg[(a+1)^2 - b^2] = lg[(a+1+b)(a+1-b)] =$$

$$= lg(a+1+b) + lg(a+1-b).$$

Умѣя логариѳмировать алгебраическія выраженія, мы можемъ, обратно, **по данному результату логариѳмированія найти выраженіе** x, логариѳмъ котораго заданъ; такъ, если:

$$log\ x = log\ a + log\ b - 3\ log\ c - \frac{1}{2}log\ d,$$

то на основаніи тѣхъ же теоремъ не трудно найти, что искомое выраженіе будетъ:

$$x = \frac{ab}{c^3\sqrt{d}}.$$

278. Системы логариѳмовъ. Совокупность логариѳмовъ различныхъ чиселъ, вычисленныхъ по одному и тому же основанію, образуетъ *систему* логариѳмовъ. Употребительны двѣ системы: система, такъ называемыхъ, *натуральныхъ* логариѳмовъ и система *десятичныхъ* логариѳмовъ. Въ первой, по нѣкоторымъ причинамъ, которыя уясняются только въ высшей математикѣ, за основаніе взято несоизмѣримое число 2,718281828... (обозначаемое обыкновенно буквою *e*); во второй за основаніе принято число 10. Логариѳмы первой системы, называемые также *Неперовыми*, по имени изобрѣтателя логариѳмовъ шотландскаго математика Непера (1550—1617), обладаютъ многими теоретическими достоинствами. Логариѳмы десятичной системы называются иначе *обыкновенными*, а также *Бригговыми*, по имени профессора Бригга (современника Непера), который первый составилъ таблицы этихъ логариѳмовъ. Эта система весьма удобна для практическихъ цѣлей.

279. Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой. Имѣя логариѳмы чиселъ, вычисленныхъ по одному какому-нибудь основанію a, можемъ найти логариѳмы, вычисленные по новому основанію b. Пусть N какое-нибудь число и

$$\log_a N = x \qquad \log_b N = y$$

т.-е.

$$N = a^x \quad \text{и} \quad N = b^y$$

откуда:

$$a^x = b^y$$

Логариѳмуемъ это равенство по основанію a:

$$x = y \log_a b, \text{ откуда: } y = x \cdot \frac{1}{\log_a b}$$

Такимъ образомъ, чтобы получить новый логариѳмъ, достаточно прежній логариѳмъ умножить на число, равное 1, дѣленной на логариѳмъ новаго основанія, взятый по старому основанію; такое число наз. *модулемъ* новой системы относительно старой. Для перехода отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ модуль оказывается 2,3025851..., а для обратнаго перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ десятичнымъ модуль есть 0,4342945...

280. Значеніе логариѳмическихъ таблицъ. Имѣя таблицы, въ которыхъ помѣщены логариѳмы цѣлыхъ чиселъ по одному и тому же основанію, отъ 1 до какого-нибудь большого числа, мы можемъ выполнять дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ. Предположимъ, напр., что надо вычислить $\sqrt[3]{ABC}$, гдѣ A, B и C суть данныя числа. Вмѣсто того, чтобы производить умноженіе и затѣмъ извлеченіе кубичнаго корня, мы можемъ, пользуясь таблицами логариѳмовъ, найти сначала $log\sqrt[3]{ABC}$, основываясь на разложеніи:

$$log\sqrt[3]{ABC}=\frac{1}{3}(logA+logB+logC).$$

Найдя въ таблицахъ отдѣльно $log\ A$, $logB$, $logC$, сложивъ ихъ и раздѣливъ сумму на 3, получимъ $log\sqrt[3]{ABC}$. По этому логариѳму, пользуясь тѣми же таблицами, можемъ найти соотвѣтствующее число.

Такимъ образомъ, руководствуясь изложенными выше теоремами о логариѳмѣ произведенія, частнаго, степени и корня, мы можемъ, помощью логариѳмическихъ таблицъ, свести умноженіе на сложеніе, дѣленіе на вычитаніе, возвышеніе въ степень на умноженіе и извлеченіе корня на дѣленіе.

На практикѣ употребительны таблицы десятичныхъ логариѳмовъ. Чтобы понять устройство и употребленіе этихъ таблицъ, предварительно разсмотримъ нѣкоторыя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

Свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

281. Теорема 1. *Логариѳмъ цѣлаго числа, изображаемаго единицею съ нулями, есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.*

Док. Такъ какъ $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$,....

и вообще $$10^m=1\overbrace{0\ldots.0}^{m\text{ нулей.}}0$$

то $log\ 10=1$, $log\ 100=2$, $log\ 1000=3$, $log\ 10000=4$

и вообще $$log\ 1\overbrace{00\ldots.00}^{m\text{ нулей.}}=m.$$

Теорема 2. *Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго единицею съ нулями, не можетъ быть выраженъ точно ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ.*

Док. Пусть N есть такое цѣлое число, которое не выражается 1 съ нулями, и допустимъ, что $\log N$ можетъ быть выраженъ точно, напр., пусть онъ равенъ дроби p/q, гдѣ p и q цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$10^{\frac{p}{q}}=N \text{ или: } 10^p=N^q.$$

Но такое равенство невозможно, потому что число 10^p разлагается только на множителей 2 и 5, повторенныхъ p разъ, а число N^q не можетъ дать такого разложенія; поэтому невозможно допущеніе, что $\log N$ выражается точно.

Логариѳмъ цѣлаго числа, которое не есть 1 съ нулями, есть число несоизмѣримое и, слѣд., при помощи соизмѣримыхъ чиселъ, онъ можетъ быть выраженъ только *приближенно*. Обыкновенно выражаютъ его въ видѣ десятичной дроби съ 5-ю или 7-ю десятичными знаками. Цѣлое число логариѳма наз. его *характеристикой*, а дробная десятичная часть—*мантиссой*.

Теорема 3. *Характеристика логариѳма цѣлаго числа или цѣлаго числа съ дробью содержитъ столько единицъ, сколько въ цѣлой части числа находится цыфръ безъ одной.*

Док. Пусть, напр., имѣемъ число 5683, 7. Такъ какъ:

$$10000>5683{,}7>1000$$

то $$\log 10000>\log 5683{,}7>\log 1000$$

т.-е. $$4>\log 5683{,}7>3$$

значитъ $$\log 5683{,}7=3+\text{полож. дробь}$$

т.-е. $$\text{характеристика } \log 5683{,}7=3.$$

Пусть вообще число N въ цѣлой своей части содержитъ m цыфръ; тогда

$$10^m>N>10^{m-1}$$

слѣд. $$\log 10^m>\log N>\log 10^{m-1}$$

откуда $$m>\log N>m-1$$

значитъ: $$\log N=(m-1)+\text{полож. дробь}$$

т.-е. $$\text{характ. } \log N=m-1.$$

Такимъ образомъ: *характ.* *log* 7,3=0; *характ.* *log* $28^{3}/_{4}$=1; *характ.* *log* 4569372=6, и т. п.

282. Какъ у отрицательнаго логариѳма сдѣлать мантиссу положительной. Прежде, чѣмъ излагать другія свойства десятичныхъ логариѳмовъ, сдѣлаемъ слѣдующее разъясненіе. Мы видѣли, что логариѳмъ дроби, меньшей 1, есть число *отрицательное;* значитъ. онъ состоитъ изъ отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы (напр.—2,08734). Такой логариѳмъ всегда можно преобразовать такъ, что у него будетъ отрицательна только одна характеристика, а мантисса положительна. Для этого достаточно прибавить къ его мантиссѣ положительную единицу, а къ характеристикѣ отрицательную (отъ чего, конечно, величина логариѳма не измѣнится). Если, напр., мы имѣемъ логариѳмъ—2,08734, то можно написать:

$$-2{,}08734=-2-1+1-0{,}08734=-(2+1)+(1-0{,}08734)=$$
$$=-3+0{,}91266$$

или сокращенно: $-2{,}08734=-\overset{-1+1}{2{,}}08734=\bar{3}{,}91266$

Для указанія того, что у логариѳма отрицательна только одна характеристика, ставятъ *надъ ней* минусъ; такъ, вмѣсто того, чтобы написать: $-3+0{,}91266$, пишутъ короче: $\bar{3}{,}91266$.

Очевидно, что при такомъ преобразованіи *абсолютная величина характеристики увеличивается на* 1, *а вмѣсто данной мантиссы берется ея дополненіе* до 1 (т.-е. то число, которое получается отъ вычитанія данной мантиссы изъ 1). Это дополненіе получится, если послѣднюю значащую цыфру данной мантиссы вычтемъ изъ 10, а всѣ остальныя изъ 9. Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

$$-2{,}56248=\bar{3}{,}43752,\quad -0{,}00830=\bar{1}{,}99170 \text{ и т. п.}$$

На практикѣ логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1, всегда представляютъ такъ, чтобы у нихъ мантиссы были положительны.

283. Какъ логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой превратить въ отрицательный. Для

этого достаточно къ положительной мантиссѣ приложить отрицательную единицу, а къ отрицательной характеристикѣ положительную; такъ, очевидно, можно писать:

$$\overline{7},83026=-7+0,83026=-7+1-1+0,83026=(-7+1)-$$
$$-(1-0,83026)=-6-0,16974=-6,16974$$

или сокращенно: $\overline{7},83026=\overset{+1}{\overline{7}},\overset{-1}{83026}=-6,16974$ *).

Очевидно, что при такомъ преобразованіи *абсолютная величина характеристики уменьшается на* 1, *а вмѣсто данной мантиссы берется ея дополненіе до* 1. Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

$\overline{3},57401=-2,42599$; $\overline{1},70830=-0,29170$ и т. п.

284. Теорема 4. *Отъ умноженія или дѣленія числа на* 10^n *положительная мантисса логариѳма остается безъ измѣненія, а характеристика увеличивается или уменьшается на* n *единицъ.*

Док. Такъ какъ

$$log(N.10^n)=log\ N+log10^n,\quad log\frac{N}{10^n}=log\ N-log10^n$$

$$\text{и}\qquad log\ 10^n=n$$

то $$log(N.10^n)=log\ N+n,\quad log\frac{N}{10^n}=log\,N-n$$

Такъ какъ n есть цѣлое число, то прибавленіе или вычитаніе n не измѣняетъ мантиссы, а только увеличиваетъ или уменьшаетъ характеристику на n единицъ.

Слѣдствія. 1) *Положительная мантисса логариѳма десятичнаго числа не измѣняется отъ перенесенія въ числѣ запятой*, потому что перенесеніе запятой равносильно умно-

---

*) **Замѣчаніе для памяти.** Для выполненія преобразованій, указанныхъ въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, приходится прибавлять +1 и —1, одно изъ этихъ чиселъ къ характеристикѣ, а другое къ мантиссѣ. Чтобы не ошибиться, къ чему прибавить +1 и къ чему —1, полезно всегда обращать вниманіе на *мантиссу* заданнаго логариѳма и разсуждать такъ: пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса отрицательна, а надо ее сдѣлать положительной; тогда къ ней, конечно, слѣдуетъ прибавить +1, а потому къ характеристикѣ надо прибавить —1; пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса будетъ положительна, а надо ее сдѣлать отрицательной (весь логариѳмъ долженъ быть отрицательный); тогда къ ней слѣдуетъ добавить —1, а слѣдовательно къ характеристикѣ +1.

женію или дѣленію на степень 10-и. Такимъ образомъ, логариѳмы чиселъ:

0,00423   0,0423   0,423   4,23,   42,3   423

отличаются только характеристиками, но не мантиссами, при условіи, что мантиссы положительны.

2) *Мантиссы чиселъ, имѣющихъ одну и ту же значащую часть, но отличающихся только нулями на концѣ, одинаковы;* такъ, логариѳмы чиселъ: 23, 230, 2300, 23000 отличаются только характеристиками.

Теорема 5. 1) *Когда десятичная дробь выражается 1 съ предшествующими нулями* (0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), *то логариѳмъ ея состоитъ изъ одной характеристики, содержащей столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.*

2) *Логариѳмъ всякой другой правильной десятичной дроби состоитъ изъ отрицательной характеристики и положительной мантиссы, причемъ характеристика содержитъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби передъ первой значащей цыфрой, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.*

Доказательство. 1) Такъ какъ

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=0,1;\ 10^{-2}=\frac{1}{100}=0,01;\ 10^{-3}=\frac{1}{1000}=0,001;\ldots$$

и вообще: $10^{-m}=\frac{1}{10^m}=\frac{1}{\underbrace{100\ldots0}_{m \text{ нулей}}}=\overbrace{0,00\ldots.0}^{m \text{ нулей}}1$

то: $lg\ 0,1=-1;\ lg\ 0,01=-2;\ lg\ 0,001=-3;\ldots$

и вообще: $lg\ \overbrace{0,00\ldots0}^{m \text{ нулей}}1=-m$

2) Пусть имѣемъ десятичную дробь $A=\overbrace{0,00\ldots.0}^{m \text{ нулей}}\alpha\beta\ldots.$ у которой передъ первой значащей цыфрой стоитъ m нулей,

считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ ($\alpha\beta\ldots$ суть какія-нибудь значащія цыфры). Тогда очевидно, что:

$$\underbrace{0{,}00\ldots0}_{m-1\text{ нулей}}1 > \underbrace{0{,}00\ldots0}_{m\text{ нулей}}\alpha\beta > \underbrace{0{,}00\ldots0}_{m\text{ нулей}}1$$

Слѣд.: $lg\ \underbrace{0{,}00\ldots0}_{m-1\text{ нулей}}1 > lg\ A > lg\ \underbrace{0{,}00\ldots0}_{m\text{ нулей}}1$

откуда: $-(m-1) > log\ A > -m$

значитъ: $log\ A = -m +$ полож. дробь

т.-е. $хар.\ log\ A = -m.$

Такимъ образ. *хар. log* 0,25=—1, *хар. log* 0,0000487=—5 и т. п.

285. Изъ доказанныхъ теоремъ слѣдуетъ, что характеристику логариѳма цѣлаго числа и десятичной дроби мы можемъ находить безъ помощи таблицъ; вслѣдствіе этого въ логариѳмическихъ таблицахъ помѣщаются только однѣ мантиссы; кромѣ того, такъ какъ нахожденіе логариѳмовъ дробей сводится къ нахожденію логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ (логариѳмъ дроби=логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя), то въ таблицахъ помѣщаются мантиссы логариѳмовъ только цѣлыхъ чиселъ.

Устройство и употребленіе таблицъ.

286. Устройство таблицъ. Опишемъ вкратцѣ устройство и употребленіе пятизначныхъ таблицъ, изданныхъ *Пржевальскимъ*, какъ наиболѣе употребительныхъ въ курсѣ среднихъ учебныхъ заведеній. Эти таблицы содержатъ логариѳмы чиселъ отъ 1 до 10009, вычисленные съ 5-ю десятичными знаками, причемъ послѣдній изъ этихъ знаковъ увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда 6-й десятичный знакъ долженъ бы оказаться 5 или болѣе 5-и; слѣд., пятизначныя таблицы даютъ *приближенные логариѳмы съ точностью до* $^1/_2$ *стотысячной доли* *).

*) Для большей точности вычисленія пользуются иногда *семизначными* таблицами (напр., таблицами *К. Бремикера)*, содержащими приближенные логариѳмы чиселъ до 100009 съ точностью до $^1/_2$ десятимиллионной доли. Способъ пользованія такими таблицами объясненъ во введеніи къ таблицамъ.

На первой страницѣ помѣщены числа отъ 1 до 100 въ столбцахъ съ надписью *N* (*numerus*—число). Противъ каждаго числа, въ столбцахъ съ надписью *Log*, находятся мантиссы, вычисленныя съ 5-ю десятичными знаками.

Слѣдующія страницы устроены иначе. Въ первомъ столбцѣ, подъ рубрикою *N*, помѣщены числа отъ 100 до 1000, а рядомъ съ ними въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ цыфра 0, находятся соотвѣтствующія мантиссы; первыя двѣ цыфры мантиссъ, общія нѣсколькимъ логариѳмамъ, написаны только разъ, а остальныя три цыфры помѣщены рядомъ съ числомъ, находящимся въ столбцѣ *N*. Эти же мантиссы принадлежатъ числамъ, которыя получатся, если къ числамъ, стоящимъ подъ рубрикою *N*, приписать справа *0*. Такъ, мантисса логар. 5690 будетъ та же, что и у числа 569, т.-е. 75511 (ст. 17-я). Слѣдующіе столбцы съ надписями надъ ними 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, служатъ для нахожденія логариѳмовъ четырехзначныхъ чиселъ (и пятизначныхъ до 10009), оканчивающихся на эти значащія цыфры, причемъ первыя три цыфры каждаго изъ этихъ чиселъ помѣщены въ столбцѣ *N*, а послѣднюю надо искать наверху, въ ряду цыфръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Напр., чтобы найти мантиссу логариѳма числа 5673, надо отыскать въ столбцѣ *N* число 567 (стр. 17) и наверху цыфру 3; въ пересѣченіи горизонтальной линіи, идущей отъ 567, съ вертикальной линіей, опущенной отъ цыфры 3, находятся *три послѣднія* цыфры мантиссы (381), первыя же ея цыфры надо искать въ столбцѣ подъ цыфрою 0, на одной горизонтальной линіи, или выше; такъ для числа 5673 первыя двѣ цыфры мантиссы будутъ 75, а послѣднія 381, такъ что всѣ 5 знаковъ будутъ 75381. Если передъ послѣдними тремя цыфрами мантиссы стоитъ въ таблицахъ звѣздочка, то это значитъ, что первыя двѣ цыфры надо брать *ниже* горизонтальной линіи, на которой расположены послѣднія цыфры мантиссы Такъ, для числа 5758 мантисса будетъ 76027 (стр. 17).

287. По данному числу найти логариѳмъ. Характеристику логариѳма цѣлаго числа или десятичной дроби мы выставляемъ непосредственно, руководствуясь указанными нами свойствами десятичныхъ логариѳмовъ. При нахожденіи мантиссы

мы примемъ во вниманіе, что положеніе запятой въ десятичномъ числѣ, или число нулей на концѣ цѣлаго числа, не оказываетъ вліянія на мантиссу.

Если значащая часть числа не превосходитъ 10009, то мантисса находится прямо изъ таблицъ. Приведемъ примѣры:

log 82=1,91381; log 0,082=$\overline{2}$,91381 (стр. 1)
log 2560=3,40824; log 256000=5,40824 (стр. 7)
log 7416=3,87017; log 74,16=1,87017 (стр. 23)

Если значащая часть числа превосходитъ 10009, то мантисса находится на основаніи слѣдующей истины, которую мы примемъ безъ доказательства: *если числа болѣе 1000, и разности между ними не превосходятъ 1, то безъ чувствительной ошибки можно принять, что разности между числами пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами* *).

Принявъ это, положимъ, что требуется найти log 74,2354. Такъ какъ величина мантиссы не зависитъ отъ положенія запятой, то перенесемъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось наибольшее число, какое только можно найти въ таблицахъ; въ нашемъ примѣрѣ для этого достаточно перенести запятую вправо на два знака. Теперь будемъ искать логариѳмъ числа 7423,54.

Выписываемъ изъ таблицъ (стр. 23) логариѳмъ числа 7423 и рядомъ ставимъ (въ скобкахъ) такъ наз. *табличную разность*, т.-е. разность между взятымъ логариѳмомъ и слѣдующимъ большимъ. Для этого вычитаемъ (въ умѣ) изъ 064 число 058; находимъ 6 (стотысячн.):

log 7423=3,87058 (6)

---

*) Справедливость этого предложенія до нѣкоторой степени можетъ быть провѣрена просмотромъ самыхъ логариѳмическихъ таблицъ. Въ этихъ таблицахъ, начиная со 2-й страницы, помѣщены четырехзначныя цѣлыя числа въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т.-е. числа эти возрастаютъ на 1. Если бы разности между числами были строго пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами, то при возрастаніи чиселъ на 1 ихъ логариѳмы возрастали бы на одно и то же число. Просматривая таблицы, замѣчаемъ, что разности между сосѣдними мантиссами, хотя и не остаются одинаковыми на протяженіи всѣхъ таблицъ, однако измѣняются очень медленно; напр., для всѣхъ чиселъ, помѣщенныхъ на страницахъ 19, 20, 21 и 22 таблицъ, разности между сосѣдними мантиссами оказываются только или 6, или 7 стотысячныхъ. Если же эти разности почти постоянны для чиселъ, отличающихся на 1 (и превосходящихъ 1000), то онѣ должны быть еще болѣе постоянными для чиселъ, отличающихся менѣе, чѣмъ на 1 (и превосходящихъ 1000).

Обозначимъ буквою Δ разность между искомымъ логариѳмомъ и логариѳмомъ, взятымъ изъ таблицъ. Эта разность соотвѣтствуетъ разности между числами 0,54, тогда какъ 6-и стотысячнымъ соотвѣтствуетъ разность между числами 1 единица; такимъ образомъ:

Разности между числами:	*Разности между логариѳмами:*
1	6 стотыс.
0,54	Δ „

На основанiи указанной выше истины можемъ написать:

$\Delta : 6 = 0{,}54 : 1$; откуда: $\Delta = 6 \,.\, 0{,}54 = 3{,}24$ (стотыс.).

Приложивъ къ 3,87058 найденную разность, найдемъ *log* 7423,54. Такъ какъ мы ограничиваемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, то въ числѣ 3,24 можемъ отбросить цыфры 2 и 4, представляющія собою милліонныя и десятимилліонныя доли; при этомъ, для уменьшенія ошибки, полезно руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: если отбрасываемая часть больше или равна 5 милліоннымъ, то, откидывая ее, мы должны увеличить на 1 оставшееся число стотысячныхъ.

Такимъ образомъ, *log* 7423,54 = 3,87058 + 3 стотыс. = = 3,87061. Такъ какъ *log* 74,2354 долженъ имѣть ту же самую мантиссу, а характеристика его должна быть 1, то

$$\log 74{,}2354 = 1{,}87061$$

Правило. *Чтобы найти мантиссу даннаго числа, имѣющаго 5 или болѣе цыфръ, выписываютъ изъ таблицъ мантиссу числа, составленнаго первыми 4 цыфрами даннаго числа, и къ ней прибавляютъ произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную остальными цыфрами даннаго числа, причемъ вмѣсто точной величины этого произведенія берутъ ближайшее къ нему цѣлое число.*

288. Употребленіе пропорціональныхъ частей. Мы видѣли, что для полученія искомой мантиссы надо къ ближайшей меньшей мантиссѣ, найденной изъ таблицъ, приложить произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную цыфрами даннаго числа, стоящими послѣ 4-й его цыфры. Это умноженіе можно производить весьма просто при помощи такъ называемыхъ *partes proportionales* (пропорціональныхъ частей), помѣщенныхъ въ таблицахъ въ

крайнемъ правомъ столбцѣ съ надписью P.P. Такъ, на стр. 23-й мы находимъ въ этомъ столбцѣ двѣ колонки, надъ которыми стоятъ цыфры: надъ одной 6, надъ другой 5. Эти цыфры означаютъ табличныя разности (въ стотысячныхъ доляхъ) между двумя рядомъ стоящими мантиссами, помѣщенными на этой страницѣ. Подъ каждой изъ этихъ табличныхъ разностей выписаны произведенія ея на 0,1, на 0,2, на 0,3...., наконецъ, на 0,9. Такъ, найдя въ колонкѣ, надъ которою стоитъ разность 6, съ лѣвой стороны цыфру 8, означающую 0,8, и взявъ справа отъ этой цыфры число 4,8, мы получимъ произведеніе 6.0,8.

Чтобы при помощи этихъ P.P. умножить, положимъ, 6 на 0,54, достаточно найти въ колонкѣ произведеніе 6.0,5 и потомъ произведеніе 6.0,04. Первое находимъ прямо: оно равно 3,0; чтобы получить второе, примемъ во вниманіе, что произведеніе 6.0,04 въ 10 разъ меньше произведенія 6.0,4; это послѣднее находимъ въ P.P.; оно равно 2,4; слѣд. 6.0,04=0,24. Сложивъ 3,0 и 0,24, найдемъ полное произведеніе 6.0,54.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Число.	*Логариѳмъ.*	
7423	87058	(6)
5	30	
4	24	
log 74,2354	=1,87061	

Подъ числомъ 7423 мы подписали цыфру 5, отступивъ на одно мѣсто вправо, потому что эта цыфра означаетъ 0,5; точно такъ же цыфра 4 отодвинута еще на одно мѣсто вправо, такъ какъ она означаетъ 0,04. Подъ мантиссой 87058 подписаны числа 30 и 24, причемъ каждое изъ нихъ отодвинуто на одно мѣсто вправо, такъ какъ 30 означаетъ 3,0 стотысячныхъ, а 24 означаетъ 0,24 стотысячныхъ. Направо помѣщена табличная разность 6.

Приведемъ еще примѣръ: найти *log* 28739,06.

Число.	*Логариѳмъ.*	
2873	45834	(15)
9	135	
0	0	
6	90	
log 28739,06	=4,45848	

289. По данному логариѳму найти число. Пусть требуется найти число, соотвѣтствующее логариѳму $\overline{1},51001$. Не обращая пока вниманія на характеристику, отыскиваемъ въ таблицахъ сначала первыя двѣ цыфры мантиссы, а потомъ и остальныя три. Оказывается, что въ таблицахъ есть мантисса 51001, соотвѣтствующая числу 3236. Принявъ во вниманіе характеристику, окончательно пишемъ:

$$\overline{1},51001 = log\ 0,3236$$

Чаще случается, что данная мантисса не находится въ таблицахъ. Пусть, напр., имѣемъ логариѳмъ: 2,59499, мантиссы котораго не находимъ въ таблицахъ. Тогда беремъ изъ таблицъ мантиссу, ближайшую меньшую къ данной, выписываемъ число, соотвѣтствующее ей, и ставимъ (въ скобкахъ) *табличную разность:*

Мантисса.	*Число.*
59494	3935 (12)

12 стотысячныхъ есть разность между логариѳмами, соотвѣтствующая разности между числами 1. Разность между данной мантиссой и ближайшей меньшей есть 5 стотыс.; эта разность соотвѣтствуетъ неизвѣстной разности между числами; обозначимъ ее Δ; такимъ образомъ:

Разности между логариѳмами.	*Разности между числами.*
12 стотыс	1
5 „	Δ

На основаніи допущенной нами пропорціональности между разностями чиселъ и соотвѣтствующихъ логариѳмовъ пишемъ:

$$\Delta : 1 = 5 : 12 \qquad \text{откуда:} \qquad \Delta = \frac{5}{12} = 0,4$$

Значитъ, число, соотвѣтствующее мантиссѣ 59499, равно $3935 + 0,4 = 3935,4$; а такъ какъ характеристика даннаго логариѳма есть 2, то искомое число есть 393,54.

Правило. *Чтобы найти число по данному логариѳму, находятъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу и*

соотвѣтствующее ей число и къ этому числу прибавляютъ частное, выраженное десятичной дробью, отъ дѣленія разности между данной мантиссой и ближайшей меньшей на соотвѣтствующую табличную разность. *)

290. Употребленіе пропорціональныхъ частей. Обращеніе Δ въ десятичную дробь можетъ быть выполнено при помощи *P.P.* Такъ, когда $\Delta=\frac{5}{12}$, то при дѣленіи 5 на 12 мы задаемся вопросомъ: на какое число десятыхъ надо умножить 12, чтобы получить 5, или число, ближайшее къ 5? Это число десятыхъ мы найдемъ въ колонкѣ, надъ которою стоитъ число 12; отыскиваемъ въ ней съ правой стороны число, ближайшее къ 5; это будетъ 4,8. Слѣва отъ 4,8 стоитъ цыфра 4, которая представитъ собою число десятыхъ долей.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Логариѳмъ.		*Число.*	
2,59499			(12)
. . 94		3935	
5		4	
2,59499	. . . . =*log*	393,54	

291. Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательными характеристиками. Сложеніе и вычитаніе не представляютъ никакихъ затрудненій, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$+\begin{array}{r}\overline{2},97346\\ 1,83027\\ \hline 0,80373\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{3},83846\\ \overline{5},98043\\ \hline \overline{7},81889\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\dot{\overline{1}},\dot{0}384\dot{2}\\ 5,96307\\ \hline 7,07535\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\dot{0},\dot{0}0\dot{5}\dot{2}3\\ \overline{4},57369\\ \hline 3,43154\end{array}$$

*) Частное это достаточно вычислить съ точностью до $^1/_2$ десятой, такъ какъ большая точность все равно не достигается по причинѣ погрѣшности, заключающейся въ принятіи пропорціональности между разностями чиселъ и разностями ихъ логариѳмовъ (см. Приложеніе).

Не представляетъ никакихъ затрудненій также и умноженіе логариѳма на положительное число; напр.:

$$\begin{array}{r} \bar{3},58376 \\ \times 9 \\ \hline \overline{22},25384 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2},47356 \\ \times 34 \\ \hline 189424 \\ 142068 \\ \hline 16,10104 \\ -68 \\ \hline \overline{52},10104 \end{array}$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ отдѣльно умножена положительная мантисса на 34, затѣмъ отрицательная характеристика на 34.

Если логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступаютъ двояко: или предварительно данный логариѳмъ обращаютъ въ отрицательный, или же умножаютъ отдѣльно мантиссу и характеристику, и результаты соединяютъ вмѣстѣ; напр.:

1) $\bar{3},56327.(-4)=-2,43673.(-4)=9,74692.$

2) $\bar{3},56327.(-4)=+12-2,25308=9,74692.$

При дѣленіи могутъ представиться два случая: 1) отрицательная характеристика дѣлится и 2) не дѣлится на дѣлителя. Въ первомъ случаѣ отдѣльно дѣлятъ характеристику и мантиссу:

$$\overline{10},37846 : 5=\bar{2},07569.$$

Во второмъ случаѣ прибавляютъ къ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, чтобы образовавшееся число дѣлилось на дѣлителя; къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ:

$$\bar{3},76081 : 8=(-8+5,76081) : 8=\bar{1},72010.$$

Это преобразованіе надо совершать въ умѣ, такъ что дѣйствіе располагается такъ:

$$\bar{3},76081 : 8=\bar{1},72010 \quad \textbf{или} \quad \bar{3},76081 \,\underline{|\,8\qquad}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{1},72010.$$

292. Замѣна вычитаемыхъ логариѳмовъ слагаемыми. При вычисленіи какого-нибудь сложнаго выраженія помощью логариѳмовъ приходится нѣкоторые логариѳмы складывать, другіе вычитать; въ такомъ случаѣ, при обыкновенномъ способѣ совершенія дѣйствій, находятъ отдѣльно сумму слагаемыхъ логариѳмовъ, потомъ сумму вычитаемыхъ и изъ первой суммы вычитаютъ вторую. Напр., если имѣемъ:

$$\log x = 2{,}73058 - \bar{2}{,}07406 + \bar{3}{,}54646 - 8{,}35890,$$

то обыкновенное выполненіе дѣйствій расположится такъ:

$$+\begin{array}{r}2{,}73058\\ \bar{3}{,}54646\\ \hline 0{,}27704\end{array} \qquad +\begin{array}{r}\bar{2}{,}07406\\ 8{,}35890\\ \hline 6{,}43296\end{array} \qquad -\begin{array}{r}0{,}27704\\ 6{,}43296\\ \hline 7{,}84408\end{array} = \log x.$$

Есть однако возможность замѣнить вычитаніе сложеніемъ. Дѣйствительно, если c есть характеристика (положительная или отрицательная), а m мантисса (положительная) даннаго вычитаемаго логариѳма, то можно, очевидно, писать:

$$-(c+m) = -c-m = -c-1+1-m = -(c+1)+(1-m).$$

Такъ какъ $c+1$ есть цѣлое число, а $1-m$ положительная дробь, то число $-(c+1)$ можно взять за характеристику, а $1-m$ за мантиссу новаго логариѳма, который можно написать такъ:

$$+[-(c+1)+(1-m)]$$

и, слѣд., можно разсматривать его, какъ слагаемое.

Отсюда выводимъ такое **правило:** *чтобы вычесть логариѳмъ, достаточно прибавить другой логариѳмъ, который составляется изъ даннаго такъ: характеристика увеличивается на 1 и результатъ берется съ обратнымъ знакомъ, а всѣ цыфры мантиссы вычитаются изъ 9, кромѣ послѣдней справа значащей цыфры, которая вычитается изъ 10.*

Руководствуясь этимъ правиломъ, можемъ прямо писать:

$$-\bar{2},07406=1,92594 \qquad -8,35890=\bar{9},64110$$

и расположить вычисленіе въ нашемъ примѣрѣ такъ:

$$\begin{array}{r} 2,73058 \\ 1,92594 \\ +\bar{3},54646 \\ \bar{9},64110 \\ \hline \bar{7},84408 \end{array} = log\ x.$$

293. Примѣры вычисленій помощью логариѳмовъ.

Примѣръ 1. *Вычислить* $x=\dfrac{36,745^2\sqrt[3]{0,17}}{2\sqrt{\dfrac{5}{6}}\cdot(82)^5}$.

Логариѳмируемъ это выраженіе:

$$log\ x=2log\ 36,745+\frac{1}{3}log0,17-log2-\frac{1}{2}log5+\frac{1}{2}log6-5log\ 82.$$

Теперь производимъ вычисленіе $log\ x$:

Предварительныя вычисленія.

Число.	*Логариѳмъ.*
3674....	56514 (12)
5...	60
log 36,745	$=1,56520$
log 0,17	$=\bar{1},23045$
log 2	$=0,30103$
log 5	$=0,69897$
$\frac{1}{2}log$ 5	$=0,34948$
log 6	$=0,77815$
log 82	$=1,91381$
$5log$ 82	$=9,56905$

Окончательныя вычисленія.

$2\ log$	36,745	$=3,13040$
$\frac{1}{3}\ log$	0,17	$=\bar{1},74348$
$-log$	2	$=\bar{1},69897$
$-\frac{1}{2}log$	5	$=\bar{1},65052$
$\frac{1}{2}\ log$	6	$=0,38907$
$-5log$	82	$=\overline{10},43095$
log	x	$=\bar{7},04339$

По этому логариѳму находимъ число:

Логариѳмъ.	*Число.*	
$\overline{7},04339$		
...36............	1105	(40)
3............	1	
$\overline{7},04339$	11051	$x=0,00000011051$

Примѣръ 2. *Вычислить* $x=(-2,31)^3\sqrt[5]{72}=-(2,31)^3\sqrt[5]{72}$

Такъ какъ искомое число отрицательное, а отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, то предварительно находимъ положительное число $-x=(2,31)^3\sqrt[5]{72}$, а потомъ и x;

$$log\ (-x)=3\ log\ 2,31+\frac{1}{5}log\ 72$$

$$log\ 2,31=0,36361 \qquad 3\ log\ 2,31=1,09083$$
$$log\ 72=1,85733 \qquad \frac{1}{5}\ log\ 72=0,37147$$
$$log\ (-x)=1,46230$$

Логариѳмъ.	*Число.*	
1,46230		
25............	2899	(15)
5...........	3	
1,46230=	log 28,993;	$x=-28,993$

Примѣръ 3. *Вычислить:* $x=\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}+\sqrt[4]{3}}$

Сплошного логариѳмированія здѣсь примѣнить нельзя, такъ какъ подъ знакомъ корня стоитъ сумма. Въ подобныхъ случаяхъ вычисляютъ формулу *по частямъ*. Сначала находимъ $N=\sqrt[5]{8}$, потомъ $N_1=\sqrt[4]{3}$; далѣе простымъ сложеніемъ опредѣляемъ $N+N_1$ и, наконецъ, вычисляемъ $\sqrt[3]{N+N_1}$:

$$log\ N=\frac{1}{5}log 8=0,18062; \qquad N=1,5157$$

$$log\ N_1=\frac{1}{4}log 3=0,11928; \qquad N_1=1,3160$$

$$N+N_1=2,8317$$

$$log\sqrt[3]{N+N_1}=\frac{1}{3}log\ 2,8317=0,15068; \quad \sqrt[3]{N+N_1}=1,41470$$

293,*a*. Замѣчаніе о погрѣшности при вычисленіи. Такъ какъ табличные логариѳмы только приблизительные, то отъ сложенія большого числа логариѳмовъ или отъ умноженія логариѳма на большое число ошибка можетъ значительно возрасти, такъ что послѣднія цыфры мантиссы, найденной для искомаго числа, могутъ оказаться невѣрными. Напр., при вычисленіи формулы $x=2^{100}$ мы должны логариѳмъ 2-хъ умножить на 100. Но пятизначный логариѳмъ 2-хъ, т.-е. 0,30103, точенъ только до $^1/_2$ стотысячной; значитъ, произведеніе 100 *log* 2, равное 30,10300, точно только до $^1/_2$ тысячной, т.-е. въ мантиссѣ только первыя три цыфры вѣрны. Просматривая въ таблицахъ мантиссы, у которыхъ первыя три цыфры суть 103, мы видимъ, что онѣ соотвѣтствуютъ числамъ, у которыхъ первыя три цыфры суть 126 или 127; значитъ, мы можемъ только ручаться за то, что

$$x > \overbrace{12600\ldots0}^{31 \text{ цыфра}} \text{ и } x < \overbrace{12800\ldots0}^{31 \text{ цыфра}}.$$

Болѣе подробныя свѣдѣнія о предѣлѣ погрѣшности, совершаемой при вычисленіяхъ помощью пятизначныхъ таблицъ, помѣщены въ особомъ приложеніи въ концѣ этой книги.

Показательныя и логариѳмическія уравненія.

294. Показательными уравненіями называются такія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ въ видѣ показателя, а логариѳмическими—такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ подъ знакомъ *log*. Такія уравненія могутъ быть разрѣшаемы только въ частныхъ случаяхъ, причемъ приходится основываться на свойствахъ логариѳмовъ и на томъ началѣ, что *если числа равны, то равны и ихъ логариѳмы* (когда основаніе не равно 1), и обратно: *если логариѳмы равны, то равны и соотвѣтствующія имъ числа*.

Примѣръ 1. *Рѣшить уравненіе:* $2^x=1024$.

$$x \log 2=\log 1024;\ x=\frac{\log 1024}{\log 2}=\frac{3,01030}{0,30103}=10$$

Примѣръ 2. *Рѣшить уравненіе:* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}=5$

Подобно предыдущему находимъ:

$$(x^2-2x)\log\frac{1}{3}=\log 5;\ (x^2-2x)(-\log 3)=\log 5$$

$$x^2-2x+\frac{\log 5}{\log 3}=0;\ x=1\pm\sqrt{1-\frac{\log 5}{\log 3}}$$

Такъ какъ $1<\frac{\log 5}{\log 3}$, то уравненіе невозможно при вещественныхъ значеніяхъ x.

Примѣръ 3. *Рѣшить уравненіе:* $0{,}001^{2^x}=0{,}3$

Логариѳмируя въ первый разъ, получимъ:

$$2^x=\frac{\log\ 0{,}3}{\log\ 0{,}001}=\frac{\overline{1},47712}{-3}=\frac{-0{,}52288}{-3}=0{,}17429$$

Логариѳмируя еще разъ, найдемъ:

$$x=\frac{\log\ 0{,}17429}{\log\ 2}=\frac{\overline{1},24128}{0{,}30103}=\frac{-0{,}75872}{0{,}30103}=-2{,}52$$

Примѣръ 4. *Рѣшить уравненіе:* $a^{2x}-a^x=1$.

Положивъ $a^x=y$, получимъ квадратное уравненіе:

$$y^2-y-1=0,\text{ откуда: } y_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y_{11}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Слѣд.: $$a^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{ и } a^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Такъ какъ $1-\sqrt{5}<0$, то послѣднее уравненіе невозможно, а первое даетъ:

$$x=\frac{\log(1+\sqrt{5})-\log 2}{\log\ a}$$

Примѣръ 5. *Рѣшить уравненіе* $\log(a+x)+\log(b+x)=$ $=\log(c+x)$

Уравненіе можно написать такъ:

$$\log[(a+x)\ (b+x)]=\log(c+x).$$

Изъ равенства логариѳмовъ заключаемъ о равенствѣ чиселъ:

$$(a+x)\ (b+x)=c+x$$

Это есть квадратное уравненіе, рѣшеніе котораго не представляетъ затрудненій.

Примѣръ 6. *Рѣшить систему:* $xy=a^2$, $\log^2 x+\log^2 y=\frac{5}{2}\log^2 a^2$

Первое уравненіе можно замѣнить такимъ:

$$\log\ x+\log\ y=\log\ a^2$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе данное, получимъ:

$$2\ log\ x\ log\ y=log^2a^2-\frac{5}{2}log^2a^2, \text{ откуда: } log\ x\ log\ y=-\frac{3}{4}log^2a^2.$$

Зная сумму и произведеніе логариѳмовъ, легко найдемъ и самые логариѳмы:

$$log\ x=\frac{3}{2}log\ a^2=log\sqrt{(a^2)^3}=log\ a^3;\ x=a^3$$

$$log\ y=-\frac{1}{2}log\ a^2=log\left[(a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=log\ a^{-1};\ \ y=a^{-1}=\frac{1}{a}$$

Примѣръ 7. *Вычислить выраженіе* $10^{1-log\ 1,(3)}$, *гдѣ знакъ log означаетъ десятичный логариѳмъ.*

Такъ какъ 1 можно замѣнить черезъ log 10, то:

$$10^{1-log\ 1,(3)}=10^{log\ 10-log^4/_3}=10^{log(10\ :\ ^4/_3)}=10^{log^{30}/_4}=\frac{30}{4}=7,5$$

Сложные проценты и срочныя уплаты.

295. Основная задача на сложные проценты. Говорятъ, что капиталъ отданъ по *сложнымъ* процентамъ, если причитающіяся на него процентныя деньги не берутся изъ банка, а присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для наращенія ихъ процентами. Замѣтивъ это, предложимъ себѣ такую задачу:

Въ какую сумму обратится капиталъ a *рублей, отданный въ ростъ по* p *сложныхъ процентовъ, по прошествіи* t *лѣтъ* (t цѣлое число)?

Обозначивъ черезъ r ежегодную прибыль на 1 рубль, т.-е. положивъ $^p/_{100}=r$, будемъ разсуждать такъ: черезъ 1 годъ каждый рубль капитала обратится въ $1+r$ руб. (напр., если капиталъ отданъ по 5%, то каждый рубль его черезъ годъ обратится въ $1+^5/_{100}$, т.-е. въ 1,05 рубля); слѣд., a рублей обратятся черезъ 1 годъ въ $a(1+r)$ руб. Еще черезъ годъ, т.-е. черезъ 2 года отъ начала роста, каждый рубль изъ этихъ $a(1+r)$ руб. обратится снова въ

$1+r$ руб.; значитъ, весь капиталъ обратится въ $a(1+r)^2$ руб. Такимъ же образомъ найдемъ, что черезъ три года капиталъ будетъ $a(1+r)^3$, черезъ 4 года $a(1+r)^4$... вообще черезъ t лѣтъ, если t цѣлое число, онъ обратится въ $a(1+r)^t$ руб. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ A окончательный капиталъ, будемъ имѣть слѣдующую **формулу сложныхъ процентовъ:**

$$A=a(1+r)^t \qquad [1]$$

Напр., если $a=2300$, $p=5\%$, $t=10$, то найдемъ:

$$r=\frac{p}{100}=0{,}05;\ A=2300(1{,}05)^{10}.$$

Чтобы вычислить A, пользуемся логариѳмами:

$$log\ A=log\ 2300+10\ log\ 1{,}05=3{,}36173+0{,}21190=3{,}57363$$
$$A=3746{,}54 \text{ руб.}$$

296. Случай, когда время есть дробное число лѣтъ. Если время, на которое отданъ капиталъ, состоитъ изъ t полныхъ лѣтъ и еще k дней, то можно сдѣлать два предположенія: 1) капиталъ a нарастаетъ сложными процентами за все время, или 2) сложные проценты считаются только за цѣлое число лѣтъ, а за k дней счетъ прибыли идетъ на простые проценты. Первое имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда нарастаніе, не завися отъ условій, принятыхъ человѣкомъ, идетъ непрерывно по одному и тому же закону (напр., при увеличеніи съ теченіемъ времени численности населенія въ какой-нибудь странѣ). Второе имѣетъ мѣсто въ банковыхъ операціяхъ. Легко убѣдиться, что въ первомъ случаѣ законъ нарастанія выражается тою же формулою [1], которую мы вывели для t цѣлаго. Предположимъ въ самомъ дѣлѣ, что $t={}^p/_q$ лѣтъ, и допустимъ, что 1 рубль черезъ ${}^1/_q$ часть года обращается въ $1+x$ руб. Тогда черезъ ${}^q/_q$ частей, т.-е. черезъ 1 годъ, онъ обратится въ $(1+x)^q$, а черезъ ${}^p/_q$ года—въ $(1+x)^p$. Но, по смыслу задачи, имѣемъ:

$$(1+x)^q=1+r$$

откуда:
$$1+x=(1+r)^{\frac{1}{q}} \text{ и } (1+x)^p=(1+r)^{\frac{p}{q}}$$

т.-е.
$$A=a(1+r)^t$$

Для случая, когда нарастаніе за часть года разсчитывается по простымъ процентамъ, можно составить другую формулу такимъ образомъ: черезъ t полныхъ лѣтъ капиталъ, нарастая сложными процентами, обратится въ $a(1+r)^t$ руб.; въ k дней каждый рубль принесетъ, считая простые проценты, $\frac{rk}{360}$ руб. процентныхъ денегъ (годъ при коммерческихъ расчетахъ считается въ 360 дней); каждый рубль изъ $a(1+r)^t$ рублей

обратится черезъ k дней въ $1+\frac{rk}{360}$ руб. Поэтому окончательный капиталъ будетъ:

$$A=a(1+r)^t\left(1+\frac{rk}{360}\right) \qquad [2]$$

Если, напр., $a=2300$, $p=5$, $t=10$ и $k=36$, то найдемъ:

$$A=2300(1,05)^{10}(1+0,005)$$

$$\log A=\log 2300+10 \log 1,05+\log 1,005=3,57580$$

$$A=3765,33$$

297. По даннымъ тремъ изъ величинъ: A, a, r и t опредѣлить четвертую. Формула (1) примѣнима и къ рѣшенію такихъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстно или a, или r, или t при прочихъ данныхъ величинахъ. Такъ, изъ нея находимъ:

Для опредѣленія начальнаго капитала: $a=\frac{A}{(1+r)^t}$

и слѣд.: $\log a=\log A-t \log (1+r)$.

Для опредѣленія процента: $1+r=\sqrt[t]{\frac{A}{a}}$

и слѣд.: $\log (1+r)=\frac{1}{t}(\log A-\log a)$

Вычисливъ по таблицамъ $1+r$, найдемъ потомъ r, т.-е. $^p/_{100}$, а слѣд. и p.

Для опредѣленія времени будемъ имѣть:

$$\log A=\log a+t \log (1+r)$$

откуда: $t=\frac{\log A-\log a}{\log(1+r)}$

При рѣшеніи задачъ по формулѣ [2] могутъ представиться нѣкоторыя затрудненія. Такъ, для опредѣленія процента эта формула даетъ уравненіе степени $t+1$-й относительно r, которое вообще не разрѣшается элементарно. Въ этомъ случаѣ можно удовольствоваться приближеннымъ рѣшеніемъ, которое находятъ слѣдующимъ образомъ. Назначивъ для r произвольное число, вычисляютъ по формулѣ [2] капиталъ A; если найденное значеніе окажется менѣе даннаго, то, замѣтивъ, что съ увеличеніемъ r увеличивается и A, даютъ для r другое произвольное значеніе, большее прежняго, и снова вычисляютъ A; если это значеніе окажется все-таки меньше даннаго, то еще увеличиваютъ r. Послѣ нѣсколькихъ испытаній

находятъ для r такое число, при которомъ вычисленное значеніе A будетъ весьма мало отличаться отъ даннаго.

Затрудненіе представляется также и тогда, когда по формулѣ [2] опредѣляется время, потому что въ этомъ случаѣ получается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными t и k. Затрудненіе это обходятъ, пользуясь сначала формулой [1] для вычисленія цѣлаго числа лѣтъ, а потомъ формулой [2] для вычисленія k. Чтобы уяснить это на примѣрѣ, рѣшимъ такую задачу:

На какое время надо отдать капиталъ 5000 рублей по 6 сложныхъ процентовъ, чтобы вмѣсто него получить 6000 рублей?

Мы не знаемъ, будетъ ли искомое число цѣлое или дробное. Предположимъ, что оно будетъ цѣлое. Въ такомъ случаѣ можемъ воспользоваться формулою [1], которая даетъ:

$$6000=5000.1{,}06^t \text{ или } 6=5.1{,}06^t$$

откуда, логариѳмируя, найдемъ:

$$t=\frac{\log 6-\log 5}{\log 1{,}06}=\frac{0{,}77815-0{,}69897}{0{,}02531}=\frac{0{,}07918}{0{,}02531}=3{,}1\ldots$$

Значитъ, нельзя предположить, что t есть число цѣлое, и потому, если только въ задачѣ подразумѣвается условіе, что за часть года нарастаніе идетъ по закону простыхъ процентовъ, мы не имѣемъ права пользоваться формулою [1]. Но нетрудно понять, что найденный изъ этой формулы результатъ не вѣренъ только относительно части года, а не цѣлаго числа лѣтъ. Такимъ образомъ мы можемъ въ формулѣ [2] на мѣсто t подставить найденное число 3, послѣ чего получимъ:

$$6000=5000.1{,}06^3\left(1+\frac{0{,}06k}{360}\right) \text{ или } 6=5.1{,}06^3\left(1+\frac{0{,}01k}{60}\right)$$

откуда: $$\log\left(1+\frac{0{,}01k}{60}\right)=\log 6-\log 5-3\log 1{,}06=0{,}00325$$

По таблицамъ находимъ: $1+\frac{0{,}01k}{60}=1{,}0075$; откуда $k=45$.

Слѣд., искомое время есть 3 года 45 дней.

298. Основная задача на срочныя уплаты. *Нѣкто занялъ* a *рублей по* $p\%$ *съ условіемъ погасить долгъ, вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами, въ* t *лѣтъ, внося въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?*

Сумма x, вносимая ежегодно при такихъ условіяхъ, наз. *срочною уплатою.* Обозначимъ опять буквою r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. число $p/_{100}$. Тогда къ

концу 1-го года долгъ a возрастетъ до $a(1+r)$, а за уплатою x рублей онъ сдѣлается $a(1+r)-x$. Къ концу 2-го года каждый рубль этой суммы снова обратится въ $1+r$ рублей, и потому долгъ будетъ $[a(1+r)-x](1+r)=a(1+r)^2-$ $-x(1+r)$, а за уплатою x рублей окажется: $a(1+r)^2-$ $-x(1+r)-x$. Такимъ же образомъ убѣдимся, что къ концу 3-го года долгъ будетъ: $a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$ и вообще къ концу t-го года онъ окажется:

$$a(1+r)^t-x(1+r)^{t-1}-x(1-r)^{t-2}\ldots-x(1+r)-x$$

или $a(1+r)^t-x[1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-1}]$

Многочленъ, стоящій внутри скобокъ [ ], представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, у которой первый членъ есть 1, послѣдній $(1+r)^{t-1}$, а знаменатель $(1+r)$. По формулѣ для суммы членовъ геометрической прогрессіи (§ 271) находимъ, что этотъ многочленъ равенъ:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=\frac{(1+r)^t-1}{r}$$

Вслѣдствіе этого величину долга послѣ t-ой уплаты можно написать такъ:

$$a(1+r)^t-x\frac{(1+r)^t-1}{r}$$

По условію задачи долгъ въ концѣ t-аго года долженъ равняться 0; поэтому:

$$a(1+r)^t-x\frac{(1+r)^t-1}{r}=0;\text{ откуда: } x=\frac{a(1+r)^t r}{(1+r)^t-1} \qquad [1]$$

При вычисленіи этой **формулы срочныхъ уплатъ** помощью логариѳмовъ мы должны сначала найти число $N=(1+r)^t$ по его логариѳму: $\log N=t\log(1+r)$; найдя N, вычтемъ изъ него 1; тогда получимъ знаменателя формулы для x, послѣ чего вторичнымъ логариѳмированіемъ найдемъ:

$$\log x=\log a+\log r+\log N-\log(N-1).$$

299. По даннымъ тремъ изъ величинъ: x, a, r и t опредѣлить четвертую. Та же формула можетъ служить для рѣшенія и такихъ задачъ, въ которыхъ извѣстна срочная

уплата, а отыскивается или занятая сумма, или время, или величина процента. Изъ нея находимъ:

для опредѣленія долга: $a=\frac{x[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t}$

для опредѣленія времени: $(1+r)^t=\frac{x}{x-ar}$;

откуда: $t=\frac{log\ x-log\ (x-ar)}{log\ (1+r)}$

Въ послѣднемъ случаѣ задача окажется невозможною, если $x\leqq ar$, такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, а $log\ 0=-\infty$ (слѣд., $t=+\infty$); невозможность задачи видна и à priori, такъ какъ произведеніе ar означаетъ ежегодныя процентныя деньги, а если срочная уплата меньше процентныхъ денегъ, или равна имъ, то, конечно, долгъ не можетъ быть погашенъ ни въ какое число лѣтъ. Задача также невозможна, если для t получается дробное число; заключающееся въ этомъ дробномъ числѣ цѣлое число n означаетъ, что n срочными уплатами долгъ не покрывается вполнѣ, а $n+1$ уплатами онъ покрывается съ избыткомъ.

Когда неизвѣстна величина процента, мы получаемъ уравненіе (степени $t+1$-й), которое элементарно можетъ быть рѣшено только приблизительно, посредствомъ подстановки въ формулу [1] на мѣсто r произвольныхъ чиселъ до тѣхъ поръ, пока не получится для x числа, близкаго къ заданному.

299,*a*. Основная задача на срочные взносы. *Нѣкто вноситъ въ банкъ въ началѣ каждаго года одну и ту же суммy* a *руб. Опредѣлить, какой капиталъ образуется изъ этихъ ежегодныхъ взносовъ по прошествіи* t *лѣтъ, если банкъ платитъ по* p *сложныхъ процентовъ.*

Обозначивъ черезъ r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. $^p/_{100}$, разсуждаемъ такъ: къ концу 1-го года капиталъ будетъ $a(1+r)$; въ началѣ 2-го года къ этой суммѣ прибавится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ окажется $a(1+r)+a$. Къ концу 2-го года онъ будетъ $a(1+r)^2+$

$+a(1+r)$; въ началѣ 3-го года снова вносится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)+a$; къ концу 3-го года онъ окажется $a(1+r)^3+a(1+r)^2+a(1+r)$. Продолжая эти разсужденія далѣе, найдемъ, что къ концу t-го года искомый капиталъ A будетъ:

$$A=a(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r)$$
$$=a(1+r)[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\ldots+1]$$
$$=a(1+r)\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)[(1+r)^t-1]}{r}$$

Такова **формула срочныхъ взносовъ**.

ДОПОЛНЕНІЯ.

ГЛАВА I.

Соединенія.

300. Опредѣленіе соединеній и ихъ раздѣленіе. Различныя группы, составленныя изъ данныхъ предметовъ и отличающіяся одна отъ другой или порядкомъ предметовъ, или самими предметами, называются вообще *соединеніями*. Предметы, входящіе въ соединенія, наз. *элементами* и обозначаются буквами a, b, c, d...

Соединенія могутъ быть трехъ родовъ: *размѣщенія* (arrangements), *перестановки* (permutations) и *сочетанія* (combinaisons). Разсмотримъ ихъ отдѣльно.

301. Размѣщенія. *Размѣщеніями изъ данныхъ* m *элементовъ по* n, *гдѣ* $n \leqslant m$, *называются такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ* n *элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ* m *элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами.*

Напр., слѣдующія соединенія представляютъ собою размѣщенія изъ 4 элементовъ a, b, c, d по 2:

$$\begin{matrix} ab & ac & ad & bc & bd & cd \\ ba & ca & da & cb & db & dc \end{matrix}$$

Изъ нихъ нѣкоторыя, напр., ab и ba, отличаются только порядкомъ элементовъ, а другія, какъ ab и ac, отличаются элементами.

Размѣщенія изъ данныхъ m элементовъ могутъ быть по 1, по 2, по 3..., и, наконецъ, по m.

Иногда бываетъ нужно знать число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n, не составляя самихъ размѣщеній. Условимся это число обозначать символомъ A_m^n (здѣсь

A есть начальная буква слова arrangement). Чтобы найти это число, разсмотримъ пріемъ, посредствомъ котораго можно составлять всевозможныя размѣщенія.

Пусть намъ дано m элементовъ:

$$a, b, c, \ldots k, l$$

Сначала составимъ изъ нихъ всѣ размѣщенія по одному. Ихъ будетъ, очевидно, m. Значитъ: $A_m^1 = m$. Теперь составимъ всѣ размѣщенія по 2. Для этого къ каждому изъ размѣщеній по одному будемъ приставлять послѣдовательно всѣ *остающіеся* элементы по одному:

$ab, ac, ad \ldots ak, al$	($m-1$ разм.)
$ba, bc, bd \ldots bk, bl$	($m-1$ разм.)
. . . .	
$la, lb, lc \ldots \ldots lk$	($m-1$ разм.)

Такъ, къ элементу a приставимъ послѣдовательно остающіеся элементы: $b, c, d \ldots k, l$, къ элементу b приставимъ послѣдовательно остающіеся элементы: $a, c, d \ldots k, l$ и т. д. Такъ какъ всѣхъ элементовъ m, то каждому размѣщенію по 1 эл. соотвѣтствуетъ $m-1$ оставшихся элементовъ, и потому изъ каждаго размѣщенія по одному элементу мы получимъ $m-1$ размѣщеній по 2 эл., а всего ихъ будетъ $m(m-1)$. Очевидно, что другихъ размѣщеній по 2 элемента быть не можетъ. Такимъ образомъ:

$$A_m^2 = m(m-1)$$

Чтобы составить теперь размѣщенія по 3, беремъ каждое изъ размѣщеній по 2 и приставляемъ къ нему послѣдовательно по одному всѣ $m-2$ оставшіеся элемента. Тогда получимъ слѣдующія соединенія:

$abc, abd \ldots abk, abl$	($m-2$ разм.)
$acb, acd \ldots ack, acl$	($m-2$ разм.)
. . . .	
$lka, lkb \ldots \ldots$	($m-2$ разм.)

Такъ какъ число размѣщеній по 2 равно $m(m-1)$ и изъ каждаго размѣщенія по 2 получается $m-2$ размѣщенія по 3, то всѣхъ такихъ размѣщеній окажется $m(m-1)(m-2)$.

Другихъ размѣщеній по 3 элемента, очевидно, быть не можетъ. Такимъ образомъ:

$$A_m^3 = m(m-1)\ (m-2)$$

Переходя такимъ же путемъ отъ размѣщеній по 3 къ размѣщеніямъ по 4, отъ размѣщеній по 4 къ размѣщеніямъ по 5 и т. д., послѣдовательно найдемъ:

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, мы получаемъ произведенія, составленныя по слѣдующему закону: во-1) наибольшій множитель равенъ числу всѣхъ элементовъ, во-2) множители идутъ, уменьшаясь на 1, и, въ-3) число всѣхъ множителей равно числу элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе.

Законъ этотъ обладаетъ общностью, такъ какъ процессъ перехода отъ размѣщеній изъ m элементовъ по p къ размѣщеніямъ изъ m эл. по $p+1$ одинъ и тотъ же для всякой величины p.

Замѣтивъ это, можемъ писать вообще:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]$$

Такова **формула размѣщеній**; ее можно выразить такъ: *число всевозможныхъ размѣщеній изъ* m *элементовъ по* n *равно произведенію* n *послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ большее есть* m.

Такимъ образомъ, $A_4^2 = 4\ .\ 3 = 12$, $A_4^3 = 4\ .\ 3\ .\ 2 = 24$, $A_8^4 = 8.7.6.5. = 1680$, и т. п.

Примѣръ. *Въ классѣ 10 учебныхъ предметовъ и 5 разныхъ уроковъ въ день. Сколькими способами могутъ быть распредѣлены уроки въ день?*

Всевозможныя распредѣленія уроковъ въ день представляютъ собою, очевидно, всевозможныя размѣщенія изъ 10 элементовъ по 5; поэтому всѣхъ способовъ распредѣленія будетъ:

$$A_{10}^5 = 10.9.8.7.6 = 30240.$$

302. Перестановки. *Перестановками изъ данныхъ* m *элементовъ наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ всѣ* m *элементовъ и которыя отличаются одно отъ другого только порядкомъ ихъ.* Напр., перестановки

изъ трехъ элементовъ a, b и c будутъ такія соединенія: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Изъ опредѣленія видно, что перестановки представляютъ собою частный случай размѣщеній, а именно: перестановки изъ m элементовъ суть размѣщенія изъ m элементовъ по m.

Число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ обозначается символомъ P_m (здѣсь P есть начальная буква слова permutation).

Такъ какъ $P_m = A_m^m$, то **формула перестановокъ** есть слѣдующая:

$$\boldsymbol{P_m} = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1 = \mathbf{1.2.3\ldots(}\boldsymbol{m}\mathbf{-1)}\boldsymbol{m}$$

т.-е. *число всевозможныхъ перестановокъ изъ* m *элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до* m *).

Примѣръ. *Сколько девятизначныхъ чиселъ можно написать девятью разными значащими цыфрами?*

Искомое число есть $P_9 = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$.

303. Сочетанія. *Сочетаніями изъ данныхъ* m *элементовъ по* n, *гдѣ* $n \leqslant m$, *наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ* n *элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ* m *элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ.*

Напр., изъ 4 элементовъ a, b, c и d сочетанія по 3 будутъ:

abc, abd, acd, bcd.

Сочетанія изъ m элементовъ могутъ быть: по 1, по 2, по 3... и, наконецъ, по m.

Изъ опредѣленія видно, что сочетанія представляютъ собою тѣ размѣщенія, которыя отличаются одно отъ другого элементами. Это обстоятельство позволяетъ найти число всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, обозначаемое символомъ C_m^n (здѣсь C есть начальная буква слова combinaison). Въ самомъ дѣлѣ, если, найдя всѣ сочетанія изъ m элем. по n, мы сдѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всевозможныя перестановки, то получимъ всѣ размѣщенія изъ m элем. по n. Напр., сдѣлавъ въ каждомъ изъ написанныхъ выше сочета-

*) Произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m включительно обозначается иногда сокращенно такъ: $m!$

ній изъ 4 элем. по 3 всевозможныя перестановки, получимъ всевозможныя размѣщенія изъ 4-хъ элементовъ по 3:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Дѣйствительно: во-первыхъ, эти соединенія суть *различныя размѣщенія*, такъ какъ они отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами; во-вторыхъ, въ этихъ соединеніяхъ должны встрѣтиться *всѣ* размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3, такъ какъ, если бы могло быть размѣщеніе, не встрѣчающееся въ полученныхъ соединеніяхъ, то оно отличалось бы отъ нихъ или порядкомъ, или элементами; если порядкомъ, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ перестановокъ; если элементами, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ сочетаній.

Изъ этого слѣдуетъ, что число всѣхъ размѣщеній изъ m элем. по n равно числу всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, умноженному на число всѣхъ перестановокъ, какія можно сдѣлать изъ n элементовъ; другими словами:

$$A_m^n = C_m^n \,.\, P_n$$

откуда выводимъ слѣдующую **формулу сочетаній:**

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} \qquad [1]$$

Такимъ образомъ $C_4^2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$; $C_4^3 = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ и т. д.

Примѣръ. *Изъ 10 кандидатовъ на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько можетъ быть разныхъ случаевъ?*

Искомое число, очевидно, представляетъ число всевозможныхъ сочетаній изъ 10 элементовъ по 3, т.-е.

$$C_{10}^3 = \frac{10.9.8.}{1.2.3.} = 120.$$

304. Другой видъ формулы сочетаній. Формулѣ [1] можно дать иной видъ, если умножимъ числителя и знаменателя ея на произведеніе: 1. 2. 3... $(m-n)$; тогда въ числителѣ получимъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m, а въ знаменателѣ—произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, умноженное на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $m-n$:

$$C_m^n = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(m-n)} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}. \qquad [2]$$

305. Свойство сочетаній. Замѣняя въ этой формулѣ n на $m-n$, получаемъ:

$$C_m^{m-n} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-n).1.2.3\ldots n} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_n}.$$

Сравнивая эту формулу со [2], находимъ:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

т.-е. число сочетаній изъ m элем. по n равно числу сочетаній изъ m элем. по $m-n$.

Къ этому же выводу приводитъ и такое простое разсужденіе: если изъ m элементовъ отберемъ какіе-нибудь n, чтобы составить изъ нихъ одно сочетаніе, то совокупность оставшихся элементовъ составитъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ. Такимъ образомъ, каждому сочетанію, состоящему изъ n элем., соотвѣтствуетъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элем., и наоборотъ; отсюда слѣдуетъ, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Выведенное соотношеніе позволяетъ упростить нахожденіе числа сочетаній изъ m эл. по n, когда n превосходитъ $\frac{1}{2}\, m$. Напр.:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100.99.98}{1.2.3} = 161700.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ C_m^n есть число цѣлое, то формула [1] показываетъ, что *произведеніе* n *послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на произведеніе* n *первыхъ чиселъ*.

ГЛАВА II.

Биномъ Ньютона.

306. Произведеніе биномовъ, отличающихся вторыми членами. Обыкновеннымъ умноженіемъ находимъ:

$$(x+a)\ (x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)=[x^2+(a+b)x+ab]\ (x+c)=$$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

Подобно этому умноженіемъ найдемъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$$

Разсматривая получившіяся произведенія, замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведеніе представляетъ многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x.

Показатель перваго члена равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; показатели при x въ слѣдующихъ членахъ постепенно убываютъ на 1; послѣдній членъ не содержитъ x.

Коэффиціентъ 1-го члена есть 1; коэффиціентъ 2-го члена есть сумма всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ; коэффиціентъ 3-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по два; коэффиціентъ 4-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по три.

Послѣдній членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ къ произведенію какого угодно числа биномовъ. Для этого предварительно убѣдимся, что если онъ вѣренъ для произведенія m биномовъ:

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots(x+k),$$

то будетъ вѣренъ и для произведенія $m+1$ биномовъ:

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots(x+k)\ (x+l)$$

Итакъ, допустимъ, что:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots S_m$$

гдѣ S_1 означаетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ, S_2—сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по два, S_3—сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по три, и т. д.; наконецъ, S_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Умноживъ обѣ части этого равенства на биномъ $x+l$, найдемъ:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)(x+l)=(x^m+S_1x^{m-1}+S_2{}^{m-2}+\ldots.$$
$$+S_m)(x+l)=x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\ldots.+S_mx$$
$$+lx^m+lS_1x^{m-1}+\ldots.+lS_{m-1}x+lS_m$$
$$=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+\ldots+(S_m+lS_{m-1})x+lS^m$$

Разсматривая это новое произведеніе, убѣждаемся, что оно подчиняется тому же закону, какой мы предположили вѣрнымъ для m биномовъ. Дѣйствительно: во 1) этому закону слѣдуютъ показатели буквы x; во 2) коэффиціентъ 2-го члена S_1+l представляетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ, включая сюда и l; коэффиціентъ 3-го члена S_2+lS_1 есть сумма парныхъ произведеній всѣхъ вторыхъ членовъ, включая сюда и l, и т. д.; наконецъ, lS_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ: a, b, $c\ldots k$, l.

Мы выше видѣли, что разсматриваемый законъ вѣренъ для 4 биномовъ; слѣд., по доказанному теперь, онъ вѣренъ для 4+1, т.-е. для 5-ти биномовъ; если же онъ вѣренъ для 5-ти биномовъ, то онъ вѣренъ и для 6-ти биномовъ, и т. д.

Изложенное разсужденіе представляетъ такъ называемое „*доказательство отъ* m *къ* m+1“. Оно часто употребляется для показанія общности какого-нибудь правила или свойства*).

---

*) Приводимъ здѣсь другой выводъ, который, быть-можетъ, нѣкоторые преподаватели предпочтутъ изложенному въ текстѣ. Этотъ выводъ основывается на слѣдующемъ свойствѣ произведенія многочленовъ.

Произведеніе m *многочленовъ есть такой многочленъ, у котораго каждый членъ представляетъ собою произведеніе* m *множителей, а именно: одинъ множитель есть какой-нибудь членъ перваго многочлена, другой множитель — какой-нибудь членъ второго многочлена, третій множитель—какой-нибудь членъ третьяго многочлена* и т. д.

Въ вѣрности этого свойства легко убѣдимся, принявъ во вниманіе, что при умноженіи многочленовъ *каждый* членъ одного многочлена умножается на *каждый* членъ другого многочлена; значитъ, послѣ умноженія двухъ многочленовъ получаемъ такой многочленъ, у котораго каждый членъ состоитъ изъ двухъ множителей: какого-нибудь члена перваго многочлена и

307. Биномъ Ньютона и его свойства. Предположимъ, что въ доказанномъ нами равенствѣ:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}\ldots+S_m$$

всѣ вторые члены биномовъ одинаковы, т.-е. $a=b=c=\ldots=k$.

Тогда лѣвая часть его будетъ $(x+a)^m$. Посмотримъ, во что обратятся коэффицiенты S_1, S_2, $\ldots S_m$.

Коэффицiентъ S_1, равный $a+b+c+\ldots+k$, обратится въ ma. Коэффицiентъ S_2, равный $ab+ac+ad+\ldots$, обратится въ a^2, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетанiй изъ m элементовъ по два, т.-е. онъ обратится въ $\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2$. Коэффицiентъ S_3, равный $abc+abd+$ . . . . . .

какого-нибудь члена второго многочлена. Когда затѣмъ это произведенiе умножимъ на третiй многочленъ, то получимъ такой многочленъ, у котораго каждый членъ состоитъ изъ трехъ множителей: одинъ—какой-нибудь членъ перваго многочлена, другой—какой-нибудь членъ второго многочлена и третiй—какой-нибудь членъ третьяго многочлена и т. д.

Примѣнимъ это свойство къ составленiю произведенiя m биномовъ:

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots(x+k)\ (x+l)$$

Расположимъ члены произведенiя по степенямъ буквы x. Членъ съ наивысшимъ показателемъ при x можетъ быть только одинъ, именно тотъ, который получается отъ перемноженiя первыхъ членовъ *всѣхъ* биномовъ; этотъ членъ есть x^m. Членовъ, содержащихъ x^{m-1}, будетъ нѣсколько. Такiе члены получатся, если изъ одного бинома, все равно какого, возьмемъ второй членъ, а изо всѣхъ остальныхъ $m-1$ биномовъ возьмемъ первые члены. Если второй членъ возьмемъ у перваго бинома, то получимъ ax^{m-1}; если второй членъ возьмемъ у второго бинома, то получимъ bx^{m-1} и т. д. Соединивъ всѣ эти члены въ одинъ, найдемъ $(a+b+c+\ldots+k+l)x^{m-1}$. Членовъ, содержащихъ x^{m-2}, тоже будетъ нѣсколько. Такiе члены получатся, если изъ двухъ биномовъ, все равно какихъ, возьмемъ вторые члены, а изо всѣхъ остальныхъ $m-2$ биномовъ возьмемъ первые члены. Если вторые члены возьмемъ изъ перваго и второго биномовъ, то получимъ abx^{m-2}; если вторые члены возьмемъ изъ перваго и третьяго биномовъ, то получимъ acx^{m-2} и т. д. Такихъ членовъ, очевидно, будетъ столько, сколько можно составить сочетанiй изъ m элементовъ a, b, $c \ldots k$, l по 2. Соединивъ всѣ эти члены въ одинъ, получимъ $(ab+ac+ad+\ldots.)x^{m-2}$. Подобными же разсужденiями убѣдимся, что члены, содержащiе x^{m-3}, будутъ слѣдующiе: $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}\ldots$ $bckx^{m-3}\ldots$ Число этихъ членовъ равно числу сочетанiй изъ m элементовъ по 3. Соединивъ ихъ въ одинъ членъ, получимъ $(abc+abd+\ldots)x^{m-3}$, и т. д. Наконецъ, будетъ одинъ членъ, не содержащiй x. Онъ равенъ произведенiю вторыхъ членовъ всѣхъ биномовъ, т.-е. $abc..kl$.

Такимъ образомъ, если для краткости обозначимъ черезъ S_1 сумму всѣхъ вторыхъ членовъ, черезъ S_2 сумму произведенiй изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по 2, черезъ S_3 сумму произведенiй всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по 3, и т. д. и, наконецъ, черезъ S_m произведенiе всѣхъ вторыхъ членовъ, то получимъ:

$$(x+a)\ \ (x+b)\ \ (x+c)\ldots.\ (x+k)\ \ (x+l)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+ \\ +\ldots\ldots+S_{m-1}x+S_m$$

обратится въ a^3, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній изъ m элементовъ по 3, то-есть въ $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$, и т. д. Наконецъ, S_m, равное $abc\ldots k$, обратится въ a^m.

Такимъ образомъ мы получимъ:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m.$$

Это равенство извѣстно подъ именемъ *бинома Ньютона*. Разсмотримъ особенности многочлена, стоящаго въ его правой части (называемаго *разложеніемъ* бинома):

1) Показатели буквы x постепенно уменьшаются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, причемъ въ первомъ членѣ показатель x равенъ показателю степени бинома, а въ послѣднемъ онъ есть 0; наоборотъ, показатели a постепенно увеличиваются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, причемъ въ первомъ членѣ показатель при a есть 0, а въ послѣднемъ онъ равенъ показателю степени бинома. Вслѣдствіе этого сумма показателей при x и a въ каждомъ членѣ равна показателю степени бинома.

2) Число всѣхъ членовъ разложенія есть $m+1$, такъ какъ разложеніе содержитъ всѣ послѣдовательныя степени a отъ 0 до m включительно.

3) Коэффиціентъ 1-го члена равенъ 1; коэффиціентъ 2-го члена есть показатель степени бинома; коэффиціентъ 3-го члена представляетъ число сочетаній изъ m элементовъ по 2; 4-го члена—число сочетаній изъ m элем. по 3; вообще, коэффиціентъ $n+1$-го члена есть число сочетаній изъ m элементовъ по n. Наконецъ, коэффиціентъ послѣдняго члена равенъ числу сочетаній изъ m элементовъ по m, о т.-е. 1.

Замѣтимъ, что всѣ эти коэффиціенты наз. *биноміальными коэффиціентами*.

4) Обозначая каждый членъ разложенія буквою T со знакомъ, указывающимъ мѣсто его въ разложеніи, т.-е. первый членъ T_1, второй членъ T_2 и т. д., можемъ написать:

$$T_{n+1}=C_m^n a^n x^{m-n}=\frac{m(m-1)...[m-(n-1)]}{1.2.3...n}a^n x^{m-n}$$

Эта формула представляетъ собою *общій членъ* разложенія, потому что изъ нея можемъ получить всѣ члены (кромѣ перваго), подставляя на мѣсто n числа: 1, 2, 3... m.

5) Коэффиціентъ 1-го члена отъ начала разложенія равенъ 1, коэффиціентъ 1-го члена отъ конца есть C_m^m, т.-е. тоже 1. Коэффиціентъ 2-го члена отъ начала есть C_m^1, т.-е. m; коэффиціентъ 2-го члена отъ конца есть C_m^{m-1}; но $C_m^1=C_m^{m-1}$ (§ 305); коэффиціентъ 3-го члена отъ начала есть C_m^2, а 3-го члена отъ конца есть C_m^{m-2}; но $C_m^2=C_m^{m-2}$; и т. д. *). Такимъ образомъ, *коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, равны между собою.*

6) Разсматривая биноміальные коэффиціенты:

$$1,\ m,\frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}...$$

замѣчаемъ, что при переходѣ отъ одного коэффиціента къ слѣдующему числители умножаются на числа все меньшія и меньшія (на $m-1$, на $m-2$, на $m-3$ и т. д.), а знаменатели умножаются на числа все большія и большія (на 2, на 3, на 4 и т. д.). Вслѣдствіе этого коэффиціенты сначала возрастаютъ (пока множители въ числителѣ остаются большими соотвѣтственныхъ множителей въ знаменателѣ), а затѣмъ убываютъ. Такъ какъ коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ строки, одинаковы, то членъ съ

---

*) Вообще, у $n+1$-го члена отъ начала коэффиціентовъ есть C_m^n; $n+1$-й членъ отъ конца занимаетъ отъ начала ряда мѣсто $(m+1)-(n+1)+1=m-n+1$; поэтому его коэффиціентъ есть C_m^{m-n}; но $C_m^n=C_m^{m-n}$; слѣд., коэффиціенты у этихъ членовъ одинаковы.

наибольшимъ коэффиціентомъ долженъ находиться посрединѣ разложенія. При этомъ надо различать два случая: первый, когда показатель бинома число *четное*, и второй, когда онъ число *нечетное*. Въ первомъ случаѣ число всѣхъ членовъ разложенія нечетное; тогда посрединѣ будетъ *одинъ членъ* съ наибольшимъ коэффиціентомъ. Во второмъ случаѣ число всѣхъ членовъ четное, и такъ какъ коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, одинаковы, то посрединѣ должны быть *два члена* съ одинаковыми наибольшими коэффиціентами.

Примѣры: 1) $(x+a)^4=x^4+4ax^3+\mathbf{6}a^2x^2+4a^3x+a^4$

2) $(x+a)^5=x^5+5ax^4+\mathbf{10}a^2x^3+\mathbf{10}a^3x^2+5a^4x+a^5$

7) Изъ сравненія двухъ рядомъ стоящихъ членовъ:

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n}$$

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](\mathbf{m}-\mathbf{n})}{1.2.3\ldots n(\mathbf{n}+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}$$

слѣдуетъ: *чтобы получить коэффиціентъ слѣдующаго члена, достаточно коэффиціентъ предыдущаго члена умножить на показателя буквы* x *въ этомъ членѣ и раздѣлить на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.*

Это свойство коэффиціентовъ значительно облегчаетъ разложеніе; такъ, пользуясь имъ, можемъ сразу писать:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\ldots$$

Написавъ члены до середины ряда, остальные получимъ, основываясь на свойствѣ 5-мъ:

$$\ldots\ldots+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$$

8) *Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна* 2^m. Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ бинома $x=a=1$, получимъ:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots+1$$

9) Замѣнивъ въ формулѣ бинома Ньютона a на $-a$, получимъ:

$$(x-a)^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(-a)^2x^{m-2}+\ldots(-a)^m$$

т.-е. $(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\ldots+(-1)^m a^m$

10) Положивъ въ послѣднемъ равенствѣ $x=a=1$, находимъ:

$$0=1-m+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^m,$$

т.-е. *сумма биномiальныхъ коэффицiентовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна суммѣ биномiальныхъ коэффицiентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.*

308. Практическiй прiемъ. Когда x и a означаютъ какiя-либо сложныя алгебраическiя количества, то для удобства приложенiя формулы бинома обыкновенно поступаютъ такъ: пишутъ въ одной строкѣ коэффицiенты разложенiя; подъ ними, въ другой строкѣ, соотвѣтствующiя степени x, т.-е. x^m, x^{m-1}, x^{m-2}.....x, 1; подъ ними, въ третьей строкѣ, соотвѣтствующiя степени a, т.-е. 1, a, a^2, a^3,...a^m; затѣмъ перемножаютъ соотвѣтственные члены трехъ строкъ и полученныя произведенiя соединяютъ знакомъ $+$, если было дано $(x+a)^m$, и попеременно знаками $+$ и $-$, если было дано $(x-a)^m$.

Для примѣра отыщемъ разложенiе $(4a^2x^3-3b)^4$:

1	4	6	4	1
$256a^8x^{12}$	$64a^6x^9$	$16a^4x^6$	$4a^2x^3$	1
1	$3b$	$9b^2$	$27b^3$	$81b^4$

$$256a^8x^{12}-768a^6bx^9+864a^4b^2x^6-432a^2b^3x^3+81b^4$$

309. Примѣненiе бинома къ многочлену. Формула бинома Ньютона позволяетъ возвышать въ степень трехчленъ и многочленъ. Такъ:

$$(a+b+c)^4=[(a+b)+c]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+$$
$$+4c^3(a+b)+c^4$$

Разложивъ $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, окончательно получимъ:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc$$
$$+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

ГЛАВА III.

Одно изъ примѣненiй бинома Ньютона.

310. Сумма одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессiи. Пусть имѣемъ ариѳметическую прогрессiю, содержащую $n+1$ членовъ:

$$\div a,\ b,\ c....k,\ l$$

Если разность ея d, то $b=a+d$, $c=b+d$,...$l=k+d$. Возвысивъ эти равенства въ $m+1$ степень, получимъ n слѣдующихъ равенствъ:

$$b^{m+1}=(a+d)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m d+\frac{(m+1)m}{1.2}a^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}$$

$$c^{m+1}=(b+d)^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)b^m d+\frac{(m+1)m}{1.2}b^{m-1}d^2+\ldots d^{m+1}$$

. . . .

$$l^{m+1}=(k+d)^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^m d+\frac{(m+1)m}{1.2}k^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}$$

Сложивъ эти равенства и положивъ для краткости:

$$S_m=a^m+b^m+c^m+\ldots k^m$$

$$S_{m-1}=a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\ldots k^{m-1}$$

. . . .

$$S_1=a+b+c+\ldots+k$$

получимъ (члены: b^{m+1},...k^{m+1} сократятся):

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)dS_m+\frac{(m+1)m}{1.2}d^2S_{m-1}+\ldots+nd^{m+1}$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ S_m, если извѣстны S_{m-1}, S_{m-2}....S_1. Полагая послѣдовательно $m=1,2,3\ldots$, найдемъ S_1, потомъ S_2, затѣмъ S_3, и т. д.

311. Сумма одинаковыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда. Примѣнивъ выведенное уравненіе къ прогрессіи:

$$\div\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots n,\ n+1$$

получимъ:

$$(n+1)^{m+1}=1+(m+1)S_m+\frac{(m+1)m}{1.2}S_{m-1}+\ldots+n$$

Полагая $m=1$, найдемъ:

$$(n+1)^2=1+2S_1+n;\ \text{откуда: } S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

При $m=2$ получимъ:

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n=1+3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

откуда: $$S_2=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\frac{3n(n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$=\frac{n(2n^2+2n+n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$m=3$ даетъ:

$$(n+1)^4=1+4S_3+6S_2+4S_1+n=1+4S_3+n(n+1)\ (2n+1)+$$
$$+2n(n+1)+n$$

откуда: $$S_3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=S_1^{\,2}$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$S_1=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=S_1^{\,2}$$

ГЛАВА IV.

Непрерывныя дроби.

312. Опредѣленіе непрерывной дроби. Непрерывною или цѣпною дробью называется дробь вида:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

гдѣ цѣлое число a складывается съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_1, сложенное съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_2, сложенное съ дробью,.. и т. д. (всѣ цѣлыя числа предполагаются положительными).

Дроби: $\frac{a}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ и т. д. наз. *составляющими дробями* или *звеньями*. Непрерывная дробь наз. *конечною* или *безконечною*, смотря по тому, будетъ ли у нея число звеньевъ конечное или безконечное. Мы будемъ разсматривать сначала только дроби *конечныя*.

Написанную выше непрерывную дробь сокращенно изображаютъ такъ:

$$(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots)$$

Напр., дроби: $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$ $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$

сокращенно изображаются: (3, 2, 1, 3) и (0, 2, 1, 17).

313. Обращеніе конечной непрерывной дроби въ обыкновенную. *Всякую конечную непрерывную дробь можно обратить въ обыкновенную;* для этого достаточно произвести, по правиламъ ариѳметики, всѣ дѣйствія, указанныя въ изображеніи непрерывной дроби. Пусть, напр., имѣемъ такую дробь:

$$(2,\ 3,\ 1,\ 4)=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$$

Производимъ указанныя дѣйствія: $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$; $1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$; $3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$; $1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19}$, $2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}$. Это и есть обыкновенная дробь, представляющая *точное значеніе* данной непрерывной.

314. Обращеніе обыкновенной дроби въ конечную непрерывную. Наоборотъ, всякую обыкновенную дробь можно обратить въ конечную непрерывную. Пусть, напр., дана дробь $\frac{A}{B}$. Исключивъ изъ нея цѣлое число, получимъ:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}$$

гдѣ a есть цѣлое частное, а r остатокъ отъ дѣленія A на B (если дробь $\frac{A}{B}$ правильная, то $a=0$ и $r=A$).

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r}{B}$ на r, получимъ:

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_1}{r}}$$

гдѣ a_1 есть цѣлое частное, а r_1 остатокъ отъ дѣленія B на r.

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r_1}{r}$ на r_1, получимъ:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}$$

гдѣ a_2 есть цѣлое частное, а r_2 остатокъ отъ дѣленія r на r_1. Продолжая этотъ пріемъ далѣе, будемъ послѣдовательно получать:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}};\quad \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}} \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ $B>r>r_1>r_2>r_3.....$, то, продоливъ этотъ пріемъ достаточно далеко, дойдемъ, очевидно, до нѣкотораго остатка, который будетъ равенъ 0. Пусть $r_n=0$, т.-е. $\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}$

Тогда путемъ подстановки получимъ:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots+\frac{1}{a_n}}}$$

Замѣчаніе. Изъ разсмотрѣнія этого пріема слѣдуетъ, что a, a_1, a_2..... a_n суть цѣлыя частныя, получаемыя при послѣдовательномъ дѣленіи A на B, потомъ B на первый остатокъ, перваго остатка на второй и т. д.; иначе сказать, это суть цѣлыя частныя, получаемыя при нахожденіи общаго наиб. дѣлителя между A и B способомъ послѣдовательнаго дѣленія. Вслѣдствіе этого числа $a, a_1\ a_2,\ldots\ a_n$ наз. *частными* непрерывной дроби.

Примѣры.

1) *Обратить въ непрерывную дробь число* $\frac{40}{17}$.

Такъ какъ

```
40|17
17| 6  2
 6| 5  2
 5|1  1
 0 5
```

то $\frac{40}{17}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$

2) *Обратить въ непрерывную дробь число* $\frac{7}{120}$.

Такъ какъ

$$\begin{array}{r|l} 7 & 120 \\ \hline 120 & 7 \quad \mathbf{0} \\ \hline 7 & 1 \quad \mathbf{17} \\ \hline 0 & \mathbf{7} \end{array}$$

то $\frac{7}{120}=\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{7}}$

315. Подходящія дроби. Если въ непрерывной дроби возьмемъ нѣсколько звеньевъ съ начала, отбросивъ всѣ остальныя, и составленную ими непрерывную дробь обратимъ въ обыкновенную, то получимъ такъ называемую *подходящую* дробь. *Первая* подходящая дробь получится, когда возьмемъ одно первое звено; *вторая*—когда возьмемъ два первыхъ звена, и т. д. Такимъ образомъ, для непрерывной дроби:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

первая подход. дробь есть... $\frac{3}{1}$

вторая „ „ „ $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

третья „ „ „ $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{10}{3}$

Четвертая подходящая дробь представитъ въ этомъ примѣрѣ точную величину непрерывной дроби $\frac{27}{8}$.

Когда въ непрерывной дроби нѣтъ цѣлаго числа, то первая подходящая дробь есть 0.

316. Законъ составленія подходящихъ дробей. Составимъ для непрерывной дроби $(a, a_1, a_2, a_3 \ldots)$ первыя три подходящія дроби:

$$1)\ \frac{a}{1} \qquad 2)\ a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1}$$

$$3)\ a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}=$$

$$=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1}$$

Сравнивъ третью подходящую дробь съ двумя первыми, замѣтимъ, что числитель третьей подходящей дроби получится, если числителя второй подходящей дроби умножимъ на соотвѣтствующее частное (т.-е. на a_2) и къ полученному произведенію приложимъ числителя первой подходящей дроби; знаменатель третьей подходящей дроби получится подобнымъ же образомъ изъ знаменателей предыдущихъ двухъ подходящихъ дробей.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ ко всякой подходящей дроби, слѣдующей за третьей, т.-е. мы докажемъ, что *вообще числитель* (n+1)*-й подходящей дроби получится, если числителя* n*-й подходящей дроби умножимъ на соотвѣтствующее частное* (т.-е. на a_n) *и къ произведенію приложимъ числителя* (n—1)*-й подходящей дроби,* и что знаменатель $(n+1)$-й подходящей дроби подобнымъ же способомъ получится изъ знаменателей n-й и $(n-1)$-й подходящихъ дробей. Употребимъ доказательство отъ n къ $(n+1)$, т.-е. докажемъ, что если этотъ законъ примѣнимъ къ n-й подходящей дроби, то онъ примѣнимъ и къ $(n+1)$-й подходящей дроби.

Обозначимъ 1-ю, 2-ю, 3-ю и т. д. подходящія дроби последовательно черезъ

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}\cdots\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\cdots$$

и замѣтимъ, что соотвѣтствующія имъ частныя будутъ

$$a,\ a_1,\ a_2\ldots\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n\ldots$$

Допустимъ, что вѣрны равенства:

$$P_n=P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n=Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2} \qquad [1]$$

и слѣдовательно: $$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2}} \qquad [2]$$

Требуется доказать, что въ такомъ случаѣ и

$$\frac{P_{n+1}}{Q^{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}} \qquad [3]$$

Изъ сравненія двухъ подходящихъ дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}}}} \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

усматриваемъ, что $(n+1)$-я подходящая дробь получится изъ n-й, если въ послѣдней замѣнимъ число a_{n-1} на сумму $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$. Поэтому равенство [2] даетъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-2}}.$$

Раскрывъ скобки и умноживъ оба члена дроби на a_n, получимъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}$$

Принявъ во вниманіе равенства [1], можемъ окончательно написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}$$

Это и есть равенство [3], которое требовалось доказать.

Такимъ образомъ, если доказываемый законъ вѣренъ для n-й подходящей дроби, то онъ будетъ вѣренъ и для $(n+1)$-й подходящей дроби. Но мы непосредственно видѣли, что онъ вѣренъ для 3-й подходящей дроби; слѣд., по доказанному, онъ примѣнимъ для 4-й подходящей дроби; а если для 4-й, то и для 5-й и т. д.

Пользуясь этимъ закономъ, составимъ всѣ подходящія дроби для слѣдующаго примѣра:

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5).$$

Вычисленіе всего удобнѣе расположить такъ:

Цѣлыя частныя:			3	2	3	1	5
Подход. дроби:	2	3	11	25	86	111	641
	1	1	4	9	31	40	231

Первыя двѣ подходящія дроби найдемъ непосредственно; это будутъ: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{1}$. Остальныя подходящія дроби получимъ, основываясь на доказанномъ законѣ. Для памяти размѣщаемъ въ верхней строкѣ цѣлыя частныя, съ 3-го до послѣдняго.

317. Теорема. *Точное значеніе конечной непрерывной дроби заключается между двумя послѣдовательными подходящими дробями, при чемъ оно ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.*

Док. Пусть имѣемъ конечную непрерывную дробь

$$(a,\ a_1,\ a_2 \dots\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1} \dots\ a_s) = A$$

точную величину которой обозначимъ черезъ A. Возьмемъ какія-нибудь три послѣдовательныя подходящія дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad \frac{P_n}{Q_n},\quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

По доказанному въ предыдущемъ параграфѣ имѣемъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

Если въ правую часть этого равенства вмѣсто a_n вставимъ $y = (a_n,\ a_{n+1} \dots\ a_s)$, то въ лѣвой части получимъ точную величину A непрерывной дроби; значитъ:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}$$

откуда: $AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1}$, или: $AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1}$ и, значитъ, $yQ_n \left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right)$

Изъ послѣдняго равенства можемъ вывести два слѣдующія заключенія:

1) Такъ какъ числа y, Q_n и Q_{n-1} положительныя, то разности, стоящія внутри скобокъ, должны быть одновременно положительны, или одновременно отрицательны; значитъ:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{если } A-\dfrac{P_n}{Q_n}>0\\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A>0\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{если } A-\dfrac{P_n}{Q_n}<0\\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A<0,\end{array}\right.$$

$$\text{т.-е.} \left\{\begin{array}{l}\text{если } A>\dfrac{P_n}{Q_n}\\ \text{то } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}>A\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{если } A<\dfrac{P_n}{Q_n}\\ \text{то } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<A\end{array}\right.$$

Слѣд., A заключено между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями.

2) Такъ какъ $y>1$ и $Q_n>Q_{n-1}$, причемъ числа Q_n и Q_{n-1} положительныя, то изъ того же равенства выводимъ:

$$\text{абс. вел. } \left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)<\text{ абс. вел. } \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\dfrac{P_n}{Q_n}$ ближе къ A, чѣмъ $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Такъ какъ, очевидно, $A>a$, т.-е. $A>\dfrac{P_1}{Q_1}$, то $A<\dfrac{P_2}{Q_2}$, $A>\dfrac{P_3}{Q_3}$, $A<\dfrac{P_4}{Q_4}$ и т. д.; т.-е. *точное значеніе непрерывной дроби болѣе всякой подходящей дроби нечетнаго порядка и менѣе всякой подходящей дроби четнаго порядка.*

318. Теорема. *Разность между двумя рядомъ стоящими подходящими дробями равна* ± 1, *дѣленной на произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.*

Док. Такъ какъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n}{Q_{n+1}Q_n}$$

то очевидно, что знаменатель этой разности удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается доказать, что числитель равенъ ± 1.

Такъ какъ: $P_{n+1}=P_n a_n+P_{n-1}$ и $Q_{n+1}=Q_n a_n+Q_{n-1}$
то: $P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n=(P_n a_n+P_{n-1})Q_n-(Q_n a_n+Q_{n-1})P_n=$
$=P_n a_n Q_n+P_{n-1}Q_n-Q_n a_n P_n-Q_{n-1}P_n=-(P_n Q_{n-1}-P_{n-1}Q_n)$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, представляетъ собою числителя дроби, которая получится отъ вычитанія изъ $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Слѣд., мы доказали, что абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_n}{Q_n}$ изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, равна абсолютной величинѣ числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ изъ $\frac{P_n}{Q_n}$; другими словами, абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія одной изъ другой двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей, есть величина постоянная для всѣхъ подходящихъ дробей. Но разность между 2-й и 1-й подходящими дробями есть:

$$\left(a+\frac{1}{a_1}\right)-a=\frac{1}{a_1}$$

Слѣд., числитель разности между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями, по абсолютной своей величинѣ, равенъ 1.

Такъ, если взять примѣръ, приведенный на стр. 319, то найдемъ:

$\frac{3}{1}-\frac{2}{1}=\frac{1}{1}$; $\frac{11}{4}-\frac{3}{1}=\frac{-1}{4}$; $\frac{25}{9}-\frac{11}{4}=\frac{1}{36}$; $\frac{86}{31}-\frac{25}{9}=\frac{-1}{279}$ и т. п.

Слѣдствія. 1. *Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая*, потому что если бы $\frac{P_n}{Q_n}$ могла быть сокращена на нѣкотораго дѣлителя $m>1$, то $P_n Q_{n-1}-P_{n-1}Q_n$ дѣлилось бы на m, что невозможно, такъ какъ эта разность равна ± 1.

II. *Если вмѣсто точной величины непрерывной дроби возьмемъ подходящую дробь* $\frac{P_n}{Q_n}$, *то сдѣлаемъ ошибку, меньшую каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:*

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}};\quad \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})};\quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

Дѣйствительно, если A есть точное значеніе непрерывной дроби, то $A-\frac{P_n}{Q_n}$ численно меньше разности $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}$, абсолютная величина которой, по доказанному, равна $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$. Съ другой стороны, такъ какъ $Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n-1}$, гдѣ $a_n\geqslant 1$, то $Q_{n+1}\geqslant Q_n+Q_{n-1}$; слѣд.:

$$Q_nQ_{n+1}\geqslant Q_n(Q_n+Q_{n-1}) \text{ и } \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$$

и потому абсол. велич. разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$.

Наконецъ, такъ какъ $Q_{n+1}>Q_n$, то $Q_{n+1}\,Q_n>Q_n^2$ и потому

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q_n^2}$$

Слѣд., абсолютная величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}<\frac{1}{Q_n^2}$.

Изъ трехъ указанныхъ предѣловъ погрѣшности самый меньшій есть $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$; но его вычисленіе предполагаетъ извѣстнымъ знаменателя подходящей дроби, слѣдующей за той, которую мы приняли за приближеніе, что не всегда имѣетъ мѣсто. Вычисленіе предѣла $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ можетъ быть выполнено только тогда, когда извѣстенъ знаменатель предшествующей подходящей дроби. Когда же извѣстна одна подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, возможно только указаніе предѣла погрѣшности $\frac{1}{Q_n^2}$.

Напр., если мы знаемъ, что нѣкоторая подходящая дробь данной непрерывной есть $\frac{45}{17}$, то можно сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$. Если, кромѣ того, знаемъ, что знаменатель предшествующей подходящей дроби есть, напр., 8, то можемъ сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17(17+8)}=\frac{1}{425}$. Наконецъ, когда зна-

емъ, еще что знаменатель слѣдующей подходящей дроби есть, напр., 37, то можемъ ручаться, что $\frac{45}{17}$ разнится отъ точнаго значенія непрерывной дроби менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{17.37}=\frac{1}{629}$.

319. Теорема. *Подходящая дробь ближе къ точному значенію непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ знаменателемъ.*

Док. Допустимъ, что существуетъ дробь $\frac{a}{b}$, менѣе отличающаяся отъ точнаго значенія непрерывной дроби A, чѣмъ подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, и пусть $b<Q_n$. Докажемъ, что это предположеніе невозможно. Такъ какъ $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, то, и подавно, $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; такъ какъ, кромѣ того, A заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше абсолютной величины разности $\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; значитъ, обращая вниманіе только на абсолютныя величины, можемъ написать:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}>\frac{aQ_{n-1}-bP_{n-1}}{bQ_{n-1}}$$
$$Q_n\ Q_{n-1}>bQ_{n-1}$$

Перемноживъ почленно эти неравенства (беря только абсолютныя величины), получимъ:

$$1>aQ_{n-1}-bP_{n-1}$$

Такъ какъ aQ_{n-1} и bP_{n-1} суть числа цѣлыя, то это неравенство возможно только при условіи:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=0; \qquad \text{откуда } \frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ, по предположенію, $\frac{a}{b}$ ближе подходитъ къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, тогда какъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, по доказанному (§ 317), больше разнится отъ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Невозможность равенства доказываетъ невозможность сдѣланнаго предположенія.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что подходящія дроби представляютъ простѣйшіе виды приближеній къ точному значенію непрерывной дроби.

320. Понятіе о безконечной непрерывной дроби. Въ предыдущихъ §§ мы разсматривали непрерывныя дроби *конечныя*. Относительно непрерывныхъ дробей *безконечныхъ* ограничимся установленіемъ слѣдующихъ истинъ.

I. **Теорема.** *Всякое положительное ирраціональное число x можетъ быть представлено въ видѣ выраженія:*

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}} = (a,\ a_1,\ a_2 .., a_{n-1},\ x_n)$$

въ которомъ буквы a, a_1, $a_2 \dots a_{n-1}$ означаютъ числа цѣлыя, положительныя, не равныя 0 (за исключеніемъ a, которое есть 0, если $x<1$) и число n которыхъ можетъ быть какъ угодно велико; буква же x_n означаетъ нѣкоторое положительное ирраціональное число, большее 1.

Док. Пусть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x, есть a (если $x<1$, это цѣлое число равно 0). Тогда x можно выразить суммою $a+x'$, гдѣ x' есть нѣкоторое положительное ирраціональное число, *меньшее 1*. Введемъ новое число x_1, связанное съ x' уравненіемъ: $x'=\frac{1}{x_1}$. Тогда x_1 должно быть положительное ирраціональное число, *большее 1*, и мы будемъ имѣть:

$$x=a+\frac{1}{x_1} \qquad [1]$$

Преобразуя x_1 такъ, какъ было сейчасъ сдѣлано съ x, получимъ:

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2} \qquad [2]$$

гдѣ a_1 есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x_1 (это число больше 0), а x_2 нѣкоторое ирраціональное число, *большее 1*. Въ свою очередь можемъ положить:

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3} \qquad [3] \qquad\qquad x_3=a_3+\frac{1}{x_4} \qquad [4]$$

и т. д. *безъ конца* (такъ какъ всегда будемъ приходить къ положительному ирраціональному числу x_k, *большему 1*).

Ограничиваясь n такими равенствами и сдѣлавъ подстановки, найдемъ для x то выраженіе, которое требовалось доказать.

Такъ какъ число звеньевъ съ цѣлыми знаменателями: a, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ можно сдѣлать какъ угодно большимъ, то говорятъ, что всякое ирраціональное число x обращается въ *безконечную* непрерывную дробь: $(a, a_1, a_2, a_3 \ldots)$.

II. Выраженіе $(a, a_1\ a_2, \ldots a_{n-1}, x_n)$, выведенное нами для ирраціональнаго числа x, отличается отъ разсмотрѣнныхъ раньше конечныхъ непрерывныхъ дробей только тѣмъ, что въ послѣднихъ *всѣ* знаменатели числа *цѣлыя*, а въ этомъ выраженіи знаменатель x_n есть *ирраціональное* число, большее 1. Но, просматривая доказательства теоремъ §§ 316, 317 и 318, мы видимъ, что въ нихъ нигдѣ не требуется допущенія, чтобы знаменатели отдѣльныхъ звеньевъ были непремѣнно цѣлыми; поэтому можемъ сказать, что теоремы эти примѣнимы и къ выраженію, выведенному нами теперь для ирраціональнаго числа x. Въ частности, напр., мы можемъ утверждать, что величина x заключается между каждыми двумя подходящими дробями, и что если вмѣсто точной величины x возьмемъ какую-нибудь подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{Q_n^2}$. Такъ какъ $Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}$, гдѣ всѣ числа Q и a не меньше 1, то при неограниченномъ увеличеніи n число Q_n возрастаетъ неограниченно и, слѣд., дробь $\frac{1}{Q_n^2}$ *уменьшается безпредѣльно*. Отсюда слѣдуетъ, что ирраціональное число x можно разсматривать, какъ *предѣлъ*, къ которому стремится неограниченный рядъ подходящихъ дробей: $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \ldots$, составленныхъ для безконечной непрерывной дроби: $(a, a_1, a_2, a_3 \ldots)$, въ которую обращается это число x.

321. Періодическая непрерывная дробь. Такъ наз. безконечная непрерывная дробь, у которой частныя повторяются въ одной и той же послѣдовательности. Таковы, напр., дроби:

Чистая періодическая:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

Смѣшанная періодическая:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

Точное значеніе періодической непрерывной дроби можно опредѣлить такимъ образомъ:

Пусть намъ извѣстно, что нѣкоторое ирраціональное число x даетъ безконечную періодическую непрерывную дробь $x=(a, a_1, a_2....a_n, a, a_1, a_2....a_n...)$. Тогда очевидно, можемъ написать:

$$x=(a, a_1, a_2...a_n, x)$$

Допустимъ теперь, что $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ есть та подходящая дробь, которая получится, если мы остановимся на послѣднемъ звенѣ перваго періода, а $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ двѣ предшествующія подходящія дроби. Очевидно, что точное значеніе данной непрерывной дроби получится изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, если въ послѣдней на мѣсто a_n подставимъ сумму $a_n+\frac{1}{x}$. Но

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n a_n+P_{n-1}}{Q_n a_n+Q_{n-1}};\ \text{слѣдов. } x=\frac{P_n\left(a_n+\frac{1}{x}\right)+P_{n-1}}{Q_n\left(a_n+\frac{1}{x}\right)+P_{n-1}}$$

или: $$x=\frac{P_n a_n x+P_n+P_{n-1}x}{Q_n a_n x+Q_n+Q_{n-1}x}=\frac{(P_n a_n+P_{n-1})x+P_n}{(Q_n a_n+Q_{n-1})x+Q_n}=\frac{P_{n+1}x+P_n}{Q_{n+1}x+Q_n}$$

Отсюда видно, что x есть корень квадратнаго уравненія:

$$Q_{n+1}x^2+(Q_n-P_{n+1})x-P_n=0$$

Это уравненіе имѣетъ вещественные корни; изъ нихъ только одинъ положительный; этотъ корень и есть значеніе данной періодической дроби.

Подобнымъ же образомъ можемъ опредѣлить точное значеніе смѣшанной періодической дроби. Пусть $x=(a,a_1...a_n,b_1,b_2..b_m,b_1,b_2..b_m...)$, гдѣ періодъ образуютъ частныя: $b_1, b_2, b_3... b_m$. Тогда предварительно найдемъ: $y=(b_1, b_2... b_m, b_1, b_2...)$, какъ указано выше, послѣ чего x опредѣлимъ изъ равенства:

$$x=\frac{P_{n+1}y+P_n}{Q_{n+1}y+Q_n}$$

Примѣръ. *Найти значеніе періодической дроби:*

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\dots}}}}}}$$

Опредѣлимъ сначала $y=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ldots}}}=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{y}}$

$$y=3+\frac{y}{5y+1}=\frac{15y+3+y}{5y+1}=\frac{16y+3}{5y+1}$$

$$5y^2-15y-3=0;\ y=\frac{15\pm\sqrt{225+60}}{10}=\frac{15\pm\sqrt{285}}{10}$$

Слѣд.: $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{y}{y+1}}=2+\frac{y+1}{3y+2}=\frac{7y+5}{3y+2}$

$$x=\frac{7(15+\sqrt{285})+50}{3(15+\sqrt{285})+20}=\frac{155+7\sqrt{285}}{65+3\sqrt{285}}=\frac{409-\sqrt{285}}{166}$$

ГЛАВА V.

Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей.

322. Приближеніе данной ариѳметической дроби. Когда числитель и знаменатель данной несократимой ариѳметической дроби выражены большими числами, часто является потребность выразить эту дробь въ болѣе простомъ, хотя и приближенномъ видѣ. Для этого достаточно обратить данную дробь въ непрерывную и найти ту или другую подходящую дробь, смотря по желаемой степени приближенія.

Примѣръ. *Зная, что число* π, *представляющее отношеніе окружности къ ея діаметру, заключено между двумя дробями: 3,141592653 и 3,141592654, найти простѣйшія приближенія* π.

Обративъ обѣ дроби въ непрерывныя и взявъ только общія неполныя частныя, найдемъ:

$$\pi=(3,\ 7,\ 15,\ 1\ldots)$$

Подходящія дроби будутъ:

		15	1	...
3	22	333	355	...
1	7	106	113	

Приближеніе $\frac{22}{7}$ было найдено *Архимедомъ;* оно вѣрно до $\frac{1}{7.106}=\frac{1}{742}$, значитъ, и подавно вѣрно до $^1/_{100}$. Число $\frac{355}{113}$ было указано *Адріаномъ Меціемъ;* взявъ это число вмѣсто π, сдѣлаемъ ошибку меньшую $\frac{1}{113.33102}=\frac{1}{3740526}$, т.-е. во всякомъ случаѣ меньшую 1 милліонной.

Приближенія Архимеда и Меція, какъ четнаго порядка, болѣе π.

323. Извлеченіе квадратнаго корня. Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи непрерывныхъ дробей. Разсуждаемъ такъ: наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}$, есть 6; поэтому можемъ положить:

$$\sqrt{41}=6+\frac{1}{x} \qquad [1]$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{x}=\sqrt{41}-6;\ x=\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}$$

Такъ какъ $\sqrt{41}+6$ равняется 12 съ дробью, то наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$ есть 2; поэтому можемъ положить:

$$x=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y} \qquad [2]$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2=\frac{\sqrt{41}-4}{5};$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}$$

Такъ какъ $\sqrt{41}+4$ равняется 10 съ дробью, то наибол-

шее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; поэтому можемъ положить:

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z} \qquad [3]$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5};\quad z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6$$

Наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}+6$, есть 12, поэтому можемъ положить:

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v} \qquad [4]$$

$$\text{Откуда: } \frac{1}{v}=\sqrt{41}-6;\quad v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}$$

Сравнивая формулу для v съ формулой для x, находимъ, что $v=x$. Пользуясь равенствами [1], [2], [3] и [4], получимъ:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}} \qquad =6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\ldots}}}}}}$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{41}$ выразился періодическою непрерывною дробью. Найдя подходящія дроби, получимъ приближенныя значенія $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$\sqrt{12}=(3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1\ldots)$; $\sqrt{29}=(5,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10\ldots)$

324. Нахожденіе пары рѣшеній неопредѣленнаго уравненія. Непрерывныя дроби даютъ средство найти одну пару рѣ-

шеній неопредѣленнаго уравненія $ax+by=c$. Покажемъ это на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ:

Примѣръ 1: $43x+15y=8$

Возьмемъ дробь $\frac{43}{15}$ и обратимъ ее въ непрерывную:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}$$

Найдемъ теперь *предпослѣднюю* подходящую дробь; это будетъ $\frac{20}{7}$. Такъ какъ послѣдняя подходящая дробь есть точное значеніе непрерывной дроби, т.-е. $\frac{43}{15}$, а $\frac{20}{7}$ есть подходящая дробь нечетнаго порядка, то на основаніи теоремъ §§ 317 (замѣчаніе) и 318, можемъ написать:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15.7};\ \text{откуда:}\ 43.7-15.20=1$$

Чтобы уподобить послѣднее тождество данному уравненію умножимъ всѣ его члены на 8 и представимъ его такъ:

$$43.56+15(-160)=8$$

Сравнивъ теперь это тождество съ нашимъ уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число 56, а за y число -160. Тогда всевозможныя рѣшенія выразятся формулами (§ 254):

$$x=56-15t;\ y=-160+43t$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+3$ (что можно сдѣлать вслѣдствіе произвольности числа t):

$$x=56-15(t+3)=11-15t;\ y=-160+43(t+3)=-31+43t$$

Примѣръ 2: $7x-19y=5.$

Обративъ дробь $\frac{7}{19}$ въ непрерывную, найдемъ:

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

Предпослѣдняя подходящая дробь будетъ $\frac{3}{8}$. Такъ какъ она четнаго порядка, то

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19.8}$$ откуда: $7.8-19.3=-1$

Умноживъ всѣ члены этого равенства на 5, получимъ:

$$7.40-19.15=-5 \text{ или: } 7.(-40)-19.(-15)=5$$

Сравнивая послѣднее тождество съ даннымъ уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число -40, а за y число -15. Тогда

$$x=-40+19t \qquad y=-15+7t$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+2$:

$$x=-40+19(t+2)=-2+19t;\ y=-15+7(t+2)=-1+7t.$$

325. Вычисленіе логариѳма. Пусть требуется вычислить $log\ 2$ по основанію 10; другими словами, требуется рѣшить уравненіе $10^x=2$. Сначала находимъ для x ближайшее цѣлое число. Такъ какъ $10^0=1$, а $10^1=10$, то x заключается между 0 и 1; слѣд., можно положить, что $x=\frac{1}{z}$; тогда $10^{\frac{1}{z}}=2$, или $10=2^z$. Не трудно видѣть, что z заключается между 3 и 4; слѣд., можно положить; $z=3+\frac{1}{z_1}$; тогда

$$10=2^{3+\frac{1}{z_1}}=2^3.2^{\frac{1}{z_1}}=8.2^{\frac{1}{z_1}}$$

откуда: $$2^{\frac{1}{z_1}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

т.-е. $$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}$$

Испытаніемъ находимъ, что z_1, заключается между 3 и 4, потому можно положить: $z_1=3+\frac{1}{z_{11}}$ тогда

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_{11}}}=\left(\frac{5}{4}\right)^3\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_{11}}}$$

откуда: $$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_{11}}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{128}{125};$$ или: $$\left(\frac{128}{125}\right)^{z_{11}}=\frac{5}{4}$$

Снова испытаніемъ находимъ, что z_{11} заключается между 9 и 10. Этотъ пріемъ можно продолжать далѣе. Довольствуясь приближенной величиной z_{11}, можемъ положить $z_{11}=9$; слѣд.:

$$z_1=3+\frac{1}{9};\ z=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}\ \text{ и }\ x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}}$$

Обративъ эту непрерывную дробь въ обыкновенную, получимъ: $x=\frac{28}{93}=0{,}30107$; этотъ результатъ вѣренъ до 4-го десятичнаго знака; болѣе точныя изысканія даютъ: $x=0{,}3010300$.

ГЛАВА VI.

Наибольшее и наименьшее значеніе трехчлена второй степени.

326. Иногда встрѣчается надобность узнать, при какомъ значеніи перемѣннаго числа x трехчленъ ax^2+bx+c получаетъ *наибольшее* или *наименьшее* изъ всѣхъ возможныхъ значеній. Этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ различными способами. Укажемъ одинъ изъ нихъ, основанный на рѣшеніи неравенства.

Пусть данъ, напр., трехчленъ $3x-x^2+5$, въ которомъ буква x означаетъ нѣкоторое перемѣнное число, измѣняющееся непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$; требуется опредѣлить: 1) имѣетъ ли этотъ трехчленъ наибольшее или наименьшее значенія, 2) чему равны эти значенія, если они существуютъ, и 3) при какой величинѣ x эти значенія имѣютъ мѣсто. Для этого приравняемъ данный трехчленъ неопредѣленному количеству m и зададимся вопросомъ, можетъ ли это количество, при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, получать всевозможныя значенія, или же оно заключено въ нѣкоторыхъ границахъ. Рѣшивъ уравненіе:

$$3x-x^2+5=m,\ \text{т.-е.}\ x^2-3x+(m-5)=0$$

находимъ: $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(m-5)}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{29}{4}-m}$

Изъ этой формулы видимъ, что не всякому значенію m соотвѣтствуетъ вещественное значеніе x, потому что при нѣкоторыхъ значеніяхъ m подкоренное число ($^{29}/_4-m$) дѣлается отрицательнымъ и величина x мнимой; значитъ, количество m должно быть подчинено ограниченію, выраженному условіемъ:

$$\frac{29}{4}-m\geqslant 0;\ \text{откуда:}\ m\leqslant\frac{29}{4}$$

Такимъ образомъ оказывается, что при вещественныхъ значеніяхъ x величина m, т.-е. величина даннаго трехчлена, никогда не можетъ быть больше $^{29}/_4$, но можетъ равняться этому числу и всякому иному, меньшему этого числа; значитъ, наибольшее значеніе даннаго трехчлена есть $^{29}/_4$, а наименьшаго значенія онъ не имѣетъ. Величина x, при которой трехчленъ дѣлается равнымъ $^{29}/_4$, опредѣляется изъ выраженія для x, когда въ него на мѣсто m вставимъ число $^{29}/_4$. При этомъ подкоренная величина обратится въ 0, и x сдѣлается равнымъ $^3/_2$.

327. Вообще, приравнявъ трехчленъ ax^2+bx+c неопредѣленному количеству m и рѣшивъ полученное отъ этого уравненіе, находимъ:

$$ax^2+bx+c=m;\ ax^2+bx+(c-m)=0;\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-m)}}{2a}$$

Чтобы x было вещественное количество, необходимо и достаточно условіе:

$$b^2-4a(c-m)\geqslant 0,\ \text{т.-е.}\ b^2-4ac+4am\geqslant 0$$

откуда находимъ (§§ 239 и 240):

при a *положительномъ*	*при* a *отрицательномъ*
$m\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$	$m\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$

Въ первомъ случаѣ количество $\frac{4ac-b^2}{4a}$ будетъ наименьшимъ, а во второмъ случаѣ наибольшимъ изъ всѣхъ значеній m, т.-е. даннаго трехчлена; и то, и другое значеніе имѣетъ мѣсто при $x=\frac{-b}{2a}$.

328. Задача 1 *). Норманское окно имѣетъ фигуру прямоугольника, завершеннаго полукругомъ. Найти высоту и ширину такого окна, при условіи, чтобы периметръ этой фигуры равнялся данной величинѣ p, а количество свѣта, пропускаемаго окномъ, было наибольшее.

Обозначимъ основаніе прямоугольника черезъ $2x$, а его высоту черезъ y; тогда площадь окна выразится: $2xy+{}^1/_2\pi x^2$, а его периметръ $2x+2y+\pi x$. Такъ какъ количество пропускаемаго свѣта пропорціонально площади окна, то вопросъ сводится къ нахожденію наиб. значенія выраженія $2xy+{}^1/_2\pi x^2$, при условіи, что $2x+2y+\pi x=p$. Изъ послѣдняго уравненія опредѣляемъ y въ зависимости отъ x:

$$y=\frac{p-2x-\pi x}{2}$$

Эту величину вставляемъ въ выраженіе площади:

$$2xy+{}^1/_2\pi x^2=px-2x^2-\pi x^2+{}^1/_2\pi x^2=px-(2+{}^1/_2\pi)x^2$$

Приравнявъ полученное выраженіе количеству m, рѣшимъ образовавшееся уравненіе:

$$px-(2+{}^1/_2\pi)x^2=m; \qquad (2+{}^1/_2\pi)x^2-px+m=0$$

$$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4(2+{}^1/_2\pi)m}}{4+\pi}$$

Для вещественности x необходимо и достаточно, чтобы

$$p^2-4(2+{}^1/_2\pi)m\geqslant 0; \text{ откуда: } m\leqslant\frac{p^2}{8+2\pi}$$

Такимъ образомъ наиб. значеніе для m есть $\frac{p^2}{8+2\pi}$ при $x=$ $=\frac{p}{4+\pi}$. При этомъ значеніи x величина y выразится:

$$y=\frac{1}{2}\left[p-(2+\pi)\frac{p}{4+\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{4p+p\pi-2p-p\pi}{4+\pi}\right]=\frac{p}{4+\pi}$$

т.-е. высота прямоугольника равна радіусу полукруга.

---

*) Эта задача и многія изъ приложенныхъ ниже взяты изъ сборника *задачъ на наибольшія и наименьшія величины*, составленнаго *А. Бѣляевымъ*. Москва, 1881 года.

329. Задача 2. Разложить число a на два слагаемыя, которыхъ произведеніе было бы наибольшее.

Пусть одно слагаемое есть x; тогда другое слагаемое выразится $a-x$. Произведеніе $(a-x)x$, равное $-x^2+ax$, представляетъ частный случай трехчлена 2-й степени. Примѣняя къ нему указанный нами способъ, находимъ:

$$-x^2+ax=m;\ x^2-ax+m=0;\ x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-m}$$

$$\frac{a^2}{4}-m\geqslant 0;\ m\leqslant\frac{a^2}{4}$$

Наиб. значеніе произведенія есть $\frac{a^2}{4}$ при $x=\frac{a}{2}$. Замѣтивъ, что второе слагаемое также равно $a/_2$, заключаемъ: *произведеніе двухъ перемѣнныхъ чиселъ, которыхъ сумма постоянна, получаетъ наибольшее значеніе тогда, когда эти числа равны другъ другу.*

330. Этотъ выводъ полезно запомнить, такъ какъ, пользуясь имъ, можно въ нѣкоторыхъ случаяхъ находить наибольшее значеніе проще, чѣмъ какимъ-либо другимъ способомъ. Если, напр., требуется найти наибольшее значеніе выраженія $x\sqrt{a^2-x^2}$, гдѣ x есть положительное число, то можемъ разсуждать такъ: наибольшее значеніе этого выраженія и наибольшее значеніе его квадрата получаются, очевидно, при одномъ и томъ же значеніи x; но квадратъ, равный $x^2(a^2-x^2)$, представляетъ произведеніе двухъ перемѣнныхъ чиселъ (x^2 и a^2-x^2), которыхъ сумма постоянна (равна a^2); слѣд., наиб. значеніе этого произведенія окажется при равенствѣ сомножителей, т.-е. при условіи $x^2=a^2-x^2$, откуда находимъ:

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{2}}\text{ и } x\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a^2}{2}$$

331. Полезно еще замѣтить, что для нахожденія наиб. или наим. значенія даннаго выраженія иногда бываетъ достаточно взять только часть его и тѣмъ значительно упростить вопросъ; если, напр., дана дробь, у которой числитель есть

постоянное положительное число, а знаменатель перемѣнное количество, то очевидно, что наибольшему значенію такой дроби соотвѣтствуетъ наименьшее значеніе ея знаменателя и наоборотъ; поэтому вопросъ приводится къ нахожденію наиб. или наим. значенія только одного знаменателя.

Задачи. 1) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, какой имѣетъ наибольшую площадь? *Отвѣтъ*: квадратъ.

2) Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ съ наибольшею площадью такъ, чтобы основаніе прямоугольника лежало на основаніи тр-ка, а вершины двухъ угловъ лежали на боковыхъ сторонахъ тр-ка. *Отвѣтъ*: высота прямоугольника равна половинѣ высоты тр-ка.

3) Изъ всѣхъ треугольниковъ съ даннымъ периметромъ $2p$ и даннымъ основаніемъ a какой имѣетъ наибольшую площадь? *Отвѣтъ:* равнобедренный.

4) Найти наибольшее значеніе произведенія xy при условіи $5x+7y=20$. *Отвѣтъ:* $x=2$, $y={}^{10}/_7$.

5) Данная прямая AB раздѣлена на 2 части въ точкѣ C и на отрѣзкахъ AC и BC построены равносторонніе тр-ки. Опредѣлить положеніе точки C при условіи, чтобы сумма объемовъ двухъ тѣлъ, получаемыхъ вращеніемъ равносторонних тр-ковъ вокругъ AB, была наибольшая. *Отвѣтъ:* точка C дѣлитъ прямую AB въ отношеніи $1:2$.

6) Дана длина h вертикальнаго столба. На какой высотѣ въ данномъ разстояніи a отъ столба онъ будетъ казаться наиболѣе длиннымъ? *Отвѣтъ:* искомая высота$={}^1/_2\ h$.

7) Нѣкто, будучи въ лодкѣ въ 3 миляхъ отъ ближайшей точки берега, желаетъ въ кратчайшее время достигнуть мѣста, находящагося въ 5 миляхъ отъ этой точки, считая вдоль берега; опредѣлить мѣсто, къ которому онъ долженъ пристать, если извѣстно, что онъ можетъ проходить по 5 миль въ часъ, а проплывать только по 4. *Отвѣтъ:* на разстояніи одной мили отъ конечнаго пункта.

8) Два желѣзнодорожные пути сходятся въ городѣ подъ угломъ 60^0. Со станціи, находящейся на первомъ пути въ разстояніи 32 верстъ отъ города, вышелъ по направленію

къ нему поѣздъ A. Въ то же время со станціи, находящейся на второмъ пути на разстояніи 50 верстъ отъ города, вышелъ другой поѣздъ B по направленію къ тому же городу, со скоростью вдвое большей скорости перваго поѣзда. Найти, гдѣ будетъ поѣздъ B во время наименьшаго разстоянія между нимъ и поѣздомъ A и опредѣлить это разстояніе. *Отвѣтъ:* въ самомъ городѣ; наименьшее разстояніе=7 верстамъ.

9) Даны n гальваническихъ элементовъ; электродвижущаяся сила каждаго равна k, внутреннее сопротивленіе r. Какъ слѣдуетъ соединить эти элементы, чтобы получить наивыгоднѣйшее дѣйствіе тока, если внѣшнее сопротивленіе равно h?

Рѣшеніе. Предположимъ, что всѣ элементы соединены въ x группъ, по $^n/_x$ элементовъ въ каждой группѣ, и пусть въ каждой группѣ элементы соединены параллельно, а группы между собою послѣдовательно. Зная, что при параллельномъ соединеніи электродвижущая сила не измѣняется, а внутреннее сопротивленіе уменьшается пропорціонально числу элементовъ, мы найдемъ, что въ каждой группѣ электродвижущая сила будетъ равна k; а внутреннее сопротивленіе $r:\frac{n}{x}$ т.-е. $\frac{rx}{n}\cdot$ Далѣе, принявъ во вниманіе, что при послѣдовательномъ соединеніи электродвижущая сила и внутреннее сопротивленіе возрастаютъ пропорціонально числу элементовъ, мы найдемъ, что въ цѣпи электродвижущая сила будетъ kx, а внутреннее сопротивленіе $\frac{rx}{n}\cdot x=\frac{rx^2}{n}\cdot$ Согласно формулѣ Ома сила тока выразится:

$$\frac{kx}{\frac{rx^2}{n}+h}=\frac{knx}{rx^2+nh}=kn.\frac{x}{rx^2+nh}$$

Очевидно, что наибольшая сила тока окажется при такомъ значеніи x, при которомъ дробь $\frac{x}{rx^2+nh}$ получаетъ наиболь-

шее значенiе. Приравняемъ эту дробь количеству m и рѣшимъ образовавшееся отъ этого уравненiе:

$$\frac{x}{rx^2+nh}=m;\ mrx^2-x+mnh=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4m^2rnh}}{2mr}$$

Для вещественности x необходимо и достаточно, чтобы

$$1-4m^2rnh\geqslant 0;\ \text{откуда:}\ m\leqslant\sqrt{\frac{1}{4rhn}}$$

Значитъ, наиб. значенiе для m есть $\sqrt{\frac{1}{4rhn}}$; при этомъ значенiи m величина x выразится:

$$x=\frac{1}{2mr}=1:2r\sqrt{\frac{1}{4rhn}}=1:\sqrt{\frac{r}{hn}}=\sqrt{\frac{nh}{r}}$$

Найдемъ, чему равно въ этомъ случаѣ внутреннее сопротивленiе батареи. Оно, какъ мы видѣли, есть $\frac{rx^2}{n}$. Подставивъ сюда на мѣсто x найденное для него выраженiе, получимъ:

$$\frac{rx^2}{n}=r\left(\sqrt{\frac{nh}{r}}\right)^2:n=nh:n=h$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему важному физическому закону:

Наивыгоднѣйшее дѣйствiе батареи оказывается тогда, когда ея внутреннее сопротивленiе равно внѣшнему.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

*Предѣлъ погрѣшности, совершаемой при вычисленіи помощью пятизначныхъ логариѳмовъ *).*

I. Предѣлъ погрѣшности при нахожденіи логариѳма даннаго числа.

Какъ мы видѣли (§ 286) пятизначныя таблицы даютъ для всякаго цѣлаго числа, не превосходящаго 10009, приближенный логариѳмъ *съ точностью до $^1/_2$ стотысячной доли.* Съ тою же точностью таблицы даютъ логариѳмъ и для всякаго такого десятичнаго числа, которое, по отбрасываніи въ немъ запятой или нулей, стоящихъ на концѣ, превращается въ цѣлое число, содержащееся въ таблицахъ. Такъ, мантиссы логариѳмовъ чиселъ:

74,16 7,416 0,7416 741600

одинаковы съ мантиссою *log* 7416, и если для этого цѣлаго числа таблицы даютъ приближенную мантиссу 87017 стотысячныхъ съ погрѣшностью до $^1/_2$ стотысячной, то и для всѣхъ написанныхъ выше чиселъ приближенная мантисса должна быть та же самая съ тою же погрѣшностью (до $^1/_2$ стотысячной).

Разсмотримъ теперь, какъ велика окажется погрѣшность въ томъ случаѣ, когда помощью таблицъ вычисляется логариѳмъ десятичнаго числа, которое, по отбрасываніи въ немъ запятой или нулей, стоящихъ на концѣ, обращается въ цѣлое число, выраженное болѣе, чѣмъ 4-мя цыфрами. Способъ полученія приближеннаго логариѳма такого числа слѣдующій.

Такъ какъ положеніе запятой въ десятичномъ числѣ не вліяетъ ни на величину приближенной мантиссы, ни на величину ея погрѣшности, то мы можемъ предположить, что въ данномъ десятичномъ числѣ запятая стоитъ послѣ 4-й цыфры слѣва, т.-е. что данное число имѣетъ видъ $n+h$, гдѣ n

---

*) Изложено съ нѣкоторыми измѣненіями и въ примѣненіи къ пятизначнымъ таблицамъ по *„Traité d'Algèbre élémentaire par N. Cor* et *J. Riemann“.* (Paris, 1898).

есть цѣлое число, выраженное 4-мя цыфрами, а h есть десятичная дробь, меньшая 1. Найдя съ помощью таблицъ мантиссу M, соотвѣтствующую числу n, и табличную разность d, мы будемъ имѣть:

Числа: *Приближ. логариѳмы:*

$$n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3+\frac{\mathrm{M}}{10^3}$$

$$n+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3+\frac{\mathrm{M}+d}{10^5}.$$

Допустивъ далѣе, что разности между логариѳмами пропорціональны разностямъ между числами, мы получаемъ:

$$\frac{\log(n+h)-\log n}{\log(n+1)-\log n}=\frac{h}{1},$$

откуда: $\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]$ [1]

и слѣд., $\log(n+h)=\log n+h[\log(n+1)-\log n]=$

$$=3+\frac{\mathrm{M}+hd}{10^5}.$$

Произведеніе hd рѣдко есть цѣлое число; бо́льшею частью оно есть цѣлое число съ дробью; въ этомъ случаѣ, такъ какъ мы довольствуемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, вмѣсто точной величины произведенія hd мы беремъ *ближайшее* къ нему цѣлое число (если, напр., $h=0{,}26$ и $d=6$, то, вмѣсто произведенія $6.0{,}26=1{,}56$, мы беремъ ближайшее цѣлое число 2). Обозначивъ это цѣлое число черезъ δ, будемъ имѣть слѣдующую приближенную величину логариѳма даннаго числа:

$$\log(n+h)=3+\frac{\mathrm{M}+\delta}{10^5}.$$

Предстоитъ теперь опредѣлить степень погрѣшности этого результата. Погрѣшность его обусловливается тремя причинами: 1) изъ таблицъ мы взяли не точные, а приближенные логариѳмы чиселъ n и $n+1$; 2) вмѣсто произведенія hd мы брали его приближенную величину δ и 3) равенство [1], которымъ мы пользовались выше, не вполнѣ вѣрно. Чтобы устранить всѣ эти причины, возьмемъ слѣдующія точныя равенства:

$$\left.\begin{aligned}\log n&=3+\frac{\mathrm{M}+\alpha}{10^5}\\ \log(n+1)&=3+\frac{\mathrm{M}+d+\alpha'}{10^5}\\ hd&=\delta+\alpha''\end{aligned}\right\}$$ гдѣ абсол. величины α, α' и α'' меньше $^1/_2$.

Съ другой стороны, помощью высшей математики, можетъ быть доказано, что если $n \geqslant 1000$ и $h < 1$, то равенство [1] въ точномъ видѣ представится такъ:

$$\log(n+h)-\log n = h\,[\log(n+1)-\log n]+\frac{\beta}{10^5},$$

гдѣ абсолютная величина β меньше $^1/_{40}$ *).

Пользуясь этими точными равенствами, получимъ:

$$\log(n+h)=3+\frac{M+\alpha+h(d+\alpha'-\alpha)+\beta}{10^5}$$

$$=3+\frac{M+\delta}{10^5}+\frac{\alpha+\alpha''+h\alpha'-h\alpha+\beta}{10^5}.$$

Сравнивая эту точную величину съ найденной раньше приближенной величиной, находимъ, что погрѣшность приближенія равна

$$\frac{\alpha+\alpha''+h\alpha'-h\alpha+\beta}{10^5}=\frac{\alpha(1-h)+\alpha''+h\alpha'+\beta}{10^5}$$

и, слѣд., она меньше

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h+h)+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{10^5}=\frac{1+\frac{1}{40}}{10^5}.$$

Такимъ образомъ оказывается, что, когда логариѳмъ даннаго числа не находится прямо въ таблицахъ, а получается изъ нихъ помощью общепринятаго вычисленія, погрѣшность результата не только не менѣе $^1/_2$ стотысячной, но даже нельзя ручаться, чтобы она была менѣе цѣлой стотысячной; однако, во всякомъ случаѣ она *менѣе $1+{}^1/_{40}$ стотысячной.*

II. Предѣлъ погрѣшности при нахожденіи числа по данному логариѳму.

Предположимъ сначала, что характеристика даннаго логариѳма есть 3. Находимъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу M, табличную разность d и разность Δ между данной мантиссой и ближайшей меньшей, взятой изъ таблицъ. Тогда будемъ имѣть:

Приближ. логариѳмы:	*Числа:*
$3+\frac{M}{10^5}$	n
$3+\frac{M+d}{10^5}$	$n+1$
$3+\frac{M+\Delta}{10^5}$	$n+h$.

*) Доказательство, изложенное по „*Traité d'algèbre par Cor et Riemann*", можно найти въ „Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики", 1903 г., № 341.

Предстоитъ найти h. Изъ приближеннаго равенства:

$$\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]$$

находимъ: $\frac{\Delta}{10^5}=\frac{hd}{10^5}$; откуда: $h=\frac{\Delta}{d}$

и, слѣд., искомое число будетъ:

$$n+\frac{\Delta}{d}.$$

Не обращая пока дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, опредѣлимъ погрѣшность найденнаго приближенія. Для этого возьмемъ точныя равенства;

Точные логариѳмы:	*Числа:*
$3+\frac{M+\alpha}{10^5}$	n
$3+\frac{M+d+\alpha'}{10^5}$	$n+1$
$3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5}$	$n+h$

и $$\log(n+h)-\log n=h[\log(n+1)-\log n]+\frac{\beta}{10^5},$$

гдѣ (обозначая заключеніемъ въ скобки числа его абсол. величину):

$$|\alpha|<\frac{1}{2}\quad |\alpha'|<\frac{1}{2}\quad |\beta|<\frac{1}{40}$$

и ω есть число стотысячныхъ, содержащееся въ погрѣшности даннаго приближеннаго логариѳма. Подставляя въ послѣднее изъ этихъ равенствъ точныя величины логариѳмовъ, находимъ (по отбрасываніи общаго знаменателя 10^5):

$$\Delta+\omega-\alpha=h(d+\alpha'-\alpha)+\beta,$$

откуда: $$h=\frac{\Delta+\omega-\alpha-\beta}{d+\alpha'-\alpha}.$$

И, слѣд., погрѣшность, совершаемая тогда, когда вмѣсто точной величины h беремъ найденное выше приближенное значеніе $\frac{\Delta}{d}$, равна:

$$\frac{\Delta+\omega-\alpha-\beta}{d+\alpha'-\alpha}-\frac{\Delta}{d}=\frac{d\omega-d\alpha-d\beta-\Delta\alpha'+\Delta\alpha}{(d+\alpha'-\alpha)d}=$$

$$=\frac{d\omega-\alpha(d-\Delta)-d\beta-\Delta\alpha'}{(d+\alpha'-\alpha)d}$$

и, слѣд., она меньше:

$$\frac{d|\omega|+\frac{1}{2}(d-\Delta+\Delta)+d.\frac{1}{40}}{\left(d-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)d}=\frac{|\omega|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}.$$

Величина эта превосходитъ $^1/_{100}$. Дѣйствительно, она, очевидно, больше числа:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}=\frac{21}{40(d-1)},$$

которое, въ свою очередь, больше $^1/_{100}$, такъ какъ изъ равенства:

$$\frac{21}{40(d-1)}>\frac{1}{100}$$

находимъ: $$d-1<\frac{2100}{40};\quad d<53\frac{1}{2},$$

что имѣетъ мѣсто на всемъ протяженіи пятизначныхъ таблицъ, въ которыхъ наибольшее значеніе d есть 44.

Итакъ, беря для искомаго числа приближенное значеніе $n+\frac{\Delta}{d}$, мы не можемъ быть увѣрены, что ошибка меньше $^1/_{100}$. Поэтому, обращая дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, безполезно находить цыфры сотыхъ и слѣдующихъ низшихъ долей, а *достаточно ограничиться одною цыфрою десятыхъ.* Если при этомъ мы имѣемъ предосторожность брать *ближайшую* цыфру десятыхъ (т.-е. увеличивать цыфру десятыхъ на 1 всякій разъ, когда цыфра сотыхъ была бы 5 или болѣе), то, отбрасывая въ десятичной дроби, получаемой отъ обращенія $\frac{\Delta}{d}$, разряды, слѣдующіе за десятыми долями, мы совершаемъ еще ошибку, меньшую $^1/_2$ десятой, т.-е. меньшую $^1/_{20}$; и тогда окончательная погрѣшность найденнаго числа будетъ менѣе

$$\frac{|\omega|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}+\frac{1}{20}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $|\omega|=0$, т.-е. когда данный логариѳмъ есть точный, погрѣшность окажется менѣе

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{d-1}+\frac{1}{20}.$$

Число это меньше $^1/_{10}$ только въ томъ случаѣ, когда $d\geqslant 12$. Значитъ, только въ этомъ случаѣ и притомъ, когда данный логариѳмъ точенъ, мы можемъ ручаться, что цыфра десятыхъ, полученная отъ дѣленія Δ на d, окажется вѣрною; въ общемъ случаѣ и за это ручаться нельзя.

Мы предполагали до сего времени, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, и что, слѣд., въ искомомъ десятичномъ числѣ запятая стоитъ послѣ 4-й цыфры слѣва. Когда характеристика будетъ иная, то въ найденномъ выше числѣ запятую придется перенести влѣво или вправо, т. е. раздѣлить число или умножить его на нѣкоторую степень 10-и. При этомъ, конечно, погрѣшность результата также раздѣлится или умножится на ту же степень 10-и.

Приложимъ все сказанное къ слѣдующему примѣру, на которомъ, между прочимъ, мы увидимъ, что, сверхъ указанныхъ выше неточностей, приходится иногда вводить и другія.

Примѣръ. *Вычислить выраженіе.*

$$x=\frac{A^2\sqrt[3]{B}}{\sqrt[4]{C}},$$

если $A=32,41275$, $B=7,185363$ *и* $C=6791,824$

Вспомогательныя вычисленія:

1. Вычисленіе $log\ A^2$.

3241 . . . . . 51068 (13)
2 26
7 91
5 65

$\log 32,41275 = 1,51071$
$\log A^2 = 3,02142$

2. Вычисленіе $log\ \sqrt[3]{B}$.

7185 . . . . . 85643 (6)
3. 18
6. 36
3. 18

$\log 7,185363 = 0,85645$
$\log \sqrt[3]{B} = 0,28548$

3. Вычисленіе *доп.* $log\sqrt[4]{C}$.

6791 . . . . . . 83193 (7)
8. 56
2 14
4. 28

$\log 6791,824 = 3,83199$
$\log\sqrt[4]{C} = 0,9579(10)$
$= 0,95800$
доп. $\log\sqrt[4]{C} = \bar{1},04200$

Окончательныя вычисленія:

$\log A^2 = 3,02142$
$\log\sqrt[3]{B} = 0,28548$
доп. $\log\sqrt[4]{C} = \bar{1},04200$

$\log x = 2,34890$
$\log x_1 = 3,34890$
$\log 2233 = 3,34889$ $(d=9)$
$0,1 = .\ .\ ^1/_9$

$x_1 = 2233,1$
$x = 223,31$

Найдемъ сначала предѣлъ погрѣшности числа x_1. Для этого предварительно надо найти предѣлъ погрѣшности ω приближеннаго $log x_1$, или— что все равно—$log x$.

Предѣлы погрѣшности:

въ $log A$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ стотысячной

въ $log A^2$ . . . . $\left(2+\frac{1}{20}\right)$ „

въ $log B$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ „

въ $log\sqrt[3]{B}$ . . . . . $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ „

Въ послѣдней строкѣ мы прибавили $^1/_2$, такъ какъ, дѣля $log\ B$ на 3, мы отбросили цыфры, слѣдующія за стотысячными долями, изъ которыхъ первая меньше 5. По той же причинѣ ниже прибавлена $^1/_2$ къ погрѣшности въ $log\sqrt[4]{C}$.

Въ $log\ C$ . . . . $\left(1+\frac{1}{40}\right)$ стотысячной

въ $log\sqrt[4]{C}$ . . . . $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ „

въ *доп.* $log\sqrt[4]{C}$ . . . . $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{40}\right)+\frac{1}{2}$ „

Предѣлъ погрѣшности въ $log x_1$ (въ стотысячныхъ доляхъ):

$$2+\frac{1}{20}+\frac{1}{3}+\frac{1}{120}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{160}+\frac{1}{2}=3\ \frac{311}{480}<3\ \frac{3}{4}.$$

Предѣлъ погрѣшности въ x_1 меньше:

$$\frac{3\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{19-1}+\frac{1}{20}=\frac{4\frac{11}{40}}{18}+\frac{1}{20}=\frac{171}{720}+\frac{1}{20}=\frac{207}{720}=0{,}29<0{,}3.$$

Такъ какъ x въ 10 разъ меньше x_1, то предѣлъ погрѣшности въ x также въ 10 разъ меньше предѣла погрѣшности въ x_1, т.-е. онъ меньше

0,03,

и потому величина x заключается въ предѣлахъ:

$$223{,}34>x>223{,}28.$$